The Leech lattice VOA as an extension of $V_{\sqrt{2}A_4}^{\otimes 6}$

安部 利之 (愛媛大学教育学部)[1]

1 序

本報告では, リーチ格子頂点作用素代数 (VOA) からムーンシャイン VOA $V^\natural$ の $\mathbb{Z}_5$-オービフォールド構成の実現を構成するという目的の途中経過を報告する. $V^\natural$ は, モンスター単純群を自己同型群に持つ単純 VOA で, 任意の加群が自分自身のコピーの直和と同型となるという非常に特徴的な性質を持つ VOA である。このような性質を持つ VOA は正則 VOA と呼ばれており, ムーンシャイン VOA は中心電荷が 24 の正則 VOA の一つである. 最近, 中心電荷 24 の正則 VOA の分類が進展しており, $V^\natural$ は共形重みが 1 の空間が 0 となるただ一つの正則 VOA となることが予想されている (FLM 予想).

ムーンシャイン VOA $V^\natural$ は Frenkel-Lepowsky-Meurman ([FLM]) によって, リーチ格子 Λ に付随する格子 VOA V_Λ から $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド構成として得られることがよく知られている。同様にリーチ格子の位数 3 の isometry から出発した $V^\natural$ の $\mathbb{Z}_3$-オービフォールド構成やより一般に p を $(p-1)|24$ を満たす素数としたときの $\mathbb{Z}_p$-オービフォールド構成の構想は 20 年程前から持たれていたが前述の FLM 予想や VOA の表現論の一般論の進展等の理由でなかなか達成できていなかった. 本報告に関する講演を行った数日前に, Lam と島倉によって $\mathbb{Z}_3$-オービフォールド構成が完成したことが公表された ([LS]).

本報告の内容は $V^\natural$ の $\mathbb{Z}_5$-オービフォールド構成を目指しており, その途中経過として, リーチ格子の位数 5 の isometry σ として, リーチ格子の部分格子 $(\sqrt{2}A_4)^{\oplus 6}$ に付随したものを考えた. 特に $(\sqrt{2}A_4)^{\oplus 6}$ の拡大として Λ を表す際に現れる σ-不変な符号を明示的に構成したのでそのことについて報告する. 本研究は Ching-Hung Lam 氏, 山田裕理氏との共同研究である.

2 格子 $\sqrt{2}A_4$ について

$N = \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}\beta_i$ を階数 4 の自由アーベル群とし, その生成元の間の内積を

$$\langle \beta_i, \beta_j \rangle = \begin{cases} 4 & \text{if } i = j, \\ -2 & \text{if } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[1]本研究は科研費（基盤 C 15K04823）の助成を受けた研究の一環として行っている.

によって定める．この格子は A_4 型ルート格子の内積を 2 倍したものになっているので $\sqrt{2}A_4$ とも表される．格子 N の双対格子を N° とすると, N° は $\frac{1}{2}\beta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ と

$$\gamma = \frac{\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4}{5}$$

によって生成されている．その N°/N における像 $N + \frac{1}{2}\beta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 及び $N + \gamma$ が N°/N を生成し, これらの生成元によって $N^\circ/N \cong \mathbb{Z}_2^4 \times \mathbb{Z}_5$ となることがわかる．この同型写像は加法群の単射準同型

$$\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z} \to N^\circ, \quad (u, a) \mapsto \beta_{u,a} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} u_i\beta_i + a\gamma$$

から誘導される．ここで $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ とおいた．

今

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

を A_4 型リー代数のカルタン行列とすると,

$$\langle \gamma, \beta_1 \rangle = \langle \gamma, \beta_2 \rangle = \langle \gamma, \beta_3 \rangle = 0, \quad \langle \gamma, \beta_4 \rangle = 2 \quad \text{及び} \quad \langle \gamma, \gamma \rangle = 8/5 \tag{2.1}$$

に注意すれば, $u, v \in \mathbb{Z}^4$, $a, b \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\langle \beta_{u,a}, \beta_{v,b} \rangle = \frac{1}{2}uA\,{}^t v + av_4 + u_4 b + \frac{8}{5}ab, \tag{2.2}$$

が成り立つ事がわかる．

次に N°/N に属するコセットの最小ノルムを記述する為に N の直交群 $O(N)$ の構造について解説する．$O(N)$ は N の内積を実線形に拡張した内積をもつ内積空間 $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ の直交変換のうち N を保つものからなる群である．$O(N)$ の記述には一度 $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^5$ に埋め込むとわかり易い．

$\mathbb{R}^5 = \oplus_{i=1}^5 \mathbb{R}e_i$ を $e_1, \cdots, e_5$ を基本ベクトルとするユークリッド空間とし, $\epsilon_i = \sqrt{2}e_i$ とおく．このとき, $\beta_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とすれば, $N \subset \mathbb{R}^5$ とみなすことができる．実際には

$$N = (\oplus_{i=1}^5 \mathbb{Z}\epsilon_i) \cap (e_1 + \cdots + e_5)^\perp$$

となるので,

$$H := S_5 \times \langle\theta\rangle$$

が N には自然に作用する. ここで対称群 S_5 は $\mathbb{R}^5$ には成分の置換として作用している. また θ は -1 倍する写像である.

群 H は N° にも作用するが, S_5 の元はコセット $N+\gamma$ を保存し, θ は $N+\beta_i$ を保存することがわかる. 従って $S_5 \times \langle\theta\rangle$ が $N^\circ/N \cong \mathbb{Z}_2^4 \times \mathbb{Z}_5$ に作用し, S_5 は $\mathbb{Z}_2^4$ に, θ は $\mathbb{Z}_5$ にそれぞれ作用していることがわかる. その軌道は容易にわかり,

$$(\overline{\mathbf{0}}, \overline{a})^H, \quad (\overline{v^1}, \overline{a})^H, \quad (\overline{v^2}, \overline{a})^H, \quad a = 0, 1, 2.$$

ここで $\overline{\mathbf{0}} = (\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0})$, $\overline{v^1} = (\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0})$, $\overline{v^2} = (\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0})$ である. これらの軌道は $a = 0$ のとき, それぞれ 1 点, 10 点, 5 点からなり, $a = 1, 2$ の時はそれらの 2 倍の点からなる. そこで $\overline{u} = u + (2\mathbb{Z})^4$, $\overline{a} = a + 5\mathbb{Z}$ に対し, $w(\overline{u}, \overline{a})$ を $N + \beta_{u,a}$ の最小ノルムの 2 倍 [2] と定めると, それらの値は $(\overline{u}, \overline{a})$ がどの軌道に属するかによって決まる. これらの最小ノルムは次で与えられることが直接計算によってわかる.

命題 2.1. $w(\overline{\mathbf{0}}, \overline{0}) = 0$, $w(\overline{\mathbf{0}}, \overline{1}) = 16/5$, $w(\overline{\mathbf{0}}, \overline{2}) = 24/5$.
$w(\overline{v^1}, \overline{0}) = 4$, $w(\overline{v^1}, \overline{1}) = 16/5$, $w(\overline{v^1}, \overline{2}) = 4/5$.
$w(\overline{v^2}, \overline{0}) = 2$, $w(\overline{v^2}, \overline{1}) = 6/5$, $w(\overline{v^2}, \overline{2}) = 14/5$.

3　格子 $\sqrt{2}A_4$ と符号

符号を有限可換環 R 上の有限生成加群に R-双線形な内積と重みの構造をもつものと解釈し, $R = N^\circ/N$ 上の符号を構成する. この場合は $R = \mathbb{Z}_2^4 \times \mathbb{Z}_5$-符号である. まず $\mathbb{Z}_2^4$ と $\mathbb{Z}_5$ に N° の内積 (2.2) から誘導される内積を定義する. まず $\mathbb{Z}_2^4$ には

$$\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{u}}\overline{A}\,{}^t\overline{\boldsymbol{v}}, \quad \overline{A} = A + M_4(2\mathbb{Z}) \in M_4(\mathbb{Z}_2)$$

によって非退化内積を考え, 重みは $w(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{0})$ で定義する. $\mathbb{Z}_2^4$ にこの内積と重みを考えた $\mathbb{Z}_2$-符号を k とおく. 一方 $\mathbb{Z}_5$ にも内積 (2.2) から誘導される内積

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 5\langle a\gamma, b\gamma\rangle + 5\mathbb{Z} (= 8ab + 5\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}_5$$

[2] 講演では最小ノルムとしたが, 2 倍とすると今後の話がスムーズに進むのでこのように変更した.

によって非退化内積を考え, 重みは $w(\overline{\mathbf{0}},\overline{a})$ によって定義する. $\mathbb{Z}_5$ にこの内積と重みを考えた $\mathbb{Z}_5$-符号を l とおく.

符号 k については, 次の様に通常の二値符号, すなわち $\mathbb{Z}_2^s$ にユークリッド内積とハミング重みを考えた符号の $\mathbb{Z}_2$-部分空間とみなすことができる. 行列

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_2) \tag{3.1}$$

を考える. このとき写像

$$\overline{\rho} : k \to \mathbb{Z}_2^5, \quad \overline{\boldsymbol{u}} \mapsto \overline{\boldsymbol{u}}\overline{C}.$$

は加法群の単射準同型であり, $\overline{C}\,{}^t\overline{C} = \overline{A}$ が成り立つので, $\overline{\rho}$ は内積を保つ. また $\mathbb{Z}_2^5$ に S_5 を成分の置換として作用させたとき, $\overline{\rho}$ は S_5 の作用と可換となる. 更に S_5-軌道の代表として用いた $\overline{\mathbf{0}}$, $\overline{v^1}$, $\overline{v^2}$ の重みとその像のハミング重みが一致することより $\overline{\rho}$ は重みも保つことがわかる. 像 $\overline{\rho}(k)$ のパリティ検査行列が $(\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{1})$ となっているので次の命題が得られる.

命題 3.1. 符号 k は長さが 5 の単一パリティ検査符号と同型である.

二つの符号 k, l に対し, $k \times l$ に内積を

$$(\overline{u},\overline{a}) \cdot (\overline{v},\overline{b}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$(u, v \in \mathbb{Z}^4,\ a, b \in \mathbb{Z})$ によって定義し, 重みを $w(\overline{u},\overline{a})$ によって定義することで $k \times l$ を符号と考えることができる. 後で見るように k は 16 元体 $\mathbb{F}_{16}$ と同一視できるので, $k \times l$ は $R \cong \mathbb{F}_{16} \times \mathbb{Z}_5$-加群ともみなすことができる. ただし内積は R-双線形ではない.

自然数 d について, $k^d \times l^d$ 上の内積を

$$(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}}) \cdot (\overline{\boldsymbol{v}},\overline{\boldsymbol{b}}) = \sum_{i=1}^{d} (\overline{u_i} \cdot \overline{v_i}, \overline{a_i} \cdot \overline{b_i})$$

と定義する. ここで $\overline{\boldsymbol{u}} = (\overline{u_1}, \cdots, \overline{u_d})$, $\overline{\boldsymbol{v}} = (\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_d}) \in k^d$ 及び $\overline{\boldsymbol{a}} = (\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_d})$, $\overline{\boldsymbol{b}} = (\overline{b_1}, \cdots, \overline{v_d}) \in l^d$ とおいた. またこのとき $(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}}) \in k^d \times l^d$ の重み $w(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}})$ は $\sum_{i=1}^d w(\overline{u_i},\overline{a_i})$ によって定義する.

加法部分群 $\mathcal{E} \subset k^d \times l^d$ に対し,

$$\mathcal{E}^{\perp} = \{(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in k^d \times l^d | (\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathcal{E} = \{0\}\}.$$

をその双対符号とする. 同様に k^d や l^d の加法部分群についても双対符号を定義する.

次の命題より, $k^d \times l^d$ の加法部分群は k^d 及び l^d の加法部分群の直積である.

命題 3.2. 任意の加法部分群 $\mathcal{E} \subset k^d \times l^d$ に対し, ある加法部分群 $\mathcal{C} \subset k^d$ と $\mathcal{D} \subset l^d$ が存在して, $\mathcal{E} = \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が成り立つ.

この命題と内積の定義より, 容易に次が証明できる.

命題 3.3. $\mathcal{C} \subset k^d$ と $\mathcal{D} \subset l^d$ をそれぞれ加法部分群とする. このとき $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})^{\perp} = \mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{D}^{\perp}$. 特に $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が自己双対であることと $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ がどちらも自己双対であることは同値である.

次に加法部分群 $\mathcal{E} \subset k^d \times l^d$ から格子を構成する. まず $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_d) \in (\mathbb{Z}^4)^d$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し,

$$\beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}} = (\beta_{u_1,a_1}, \cdots, \beta_{u_d,a_d}) \in (N^{\circ})^d.$$

とおき, $(N^{\circ})^d/N^d$ のコセット $N^d + \beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}}$ を $L_{\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}}}$ と書く. このとき和集合

$$L_{\mathcal{E}} = \bigcup_{(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}}) \in \mathcal{E}} L_{\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{a}}}$$

は N^d 含む階数 $4d$ の格子となる.

命題 3.4. 任意の加法部分群 $\mathcal{E} \subset k^d \times l^d$ に対し, $L_{\mathcal{E}}^{\circ} = L_{\mathcal{E}^{\perp}}$.

命題 3.4 の系として次が直ちに証明できる.

系 3.5. $\mathcal{E}$ を $k^d \times l^d$ の加法加群とする.

(1) $L_{\mathcal{E}}$ が整格子であるための必要十分条件は $\mathcal{E}$ が自己直交であることである.

(2) $L_{\mathcal{E}}$ がユニモジュラーであるための必要十分条件は $\mathcal{E}$ が自己双対であることである.

また $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_d) \in (\mathbb{Z}^4)^d$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し,

$$\langle \beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}}, \beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}} \rangle \equiv \sum_{i=1}^{d} \langle \beta_{u_i,0}, \beta_{u_i,0} \rangle + \frac{8}{5}(\sum_{i=1}^{d} a_i^2) \mod 2\mathbb{Z}$$

であることを用いると, $\langle \beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}}, \beta_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}} \rangle \in 2\mathbb{Z}$ が成り立つための必要十分条件は

$$w(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{0}}) \in 4\mathbb{Z}, \quad w(\overline{\boldsymbol{0}}, \overline{\boldsymbol{a}}) \in 4\mathbb{Z}$$

であることがわかる. よって次の命題を得る.

命題 3.6. $\mathcal{E}$ を $k^d \times l^d$ の $\mathbb{Z}$-部分加群とする. このとき格子 $L_{\mathcal{E}}$ が偶である必要十分条件は任意の $(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{a}}) \in \mathcal{E}$ に対し, $w(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{0}}) \in 4\mathbb{Z}$ かつ $w(\overline{\boldsymbol{0}}, \overline{\boldsymbol{a}}) \in 4\mathbb{Z}$ が成り立つことである.

実際には $w(\overline{\boldsymbol{0}}, \overline{\boldsymbol{a}}) \in 4\mathbb{Z}$ であることは $w(\overline{\boldsymbol{0}}, \overline{\boldsymbol{a}}) \in 8\mathbb{Z}$ であることと同値であり, これは $\sum_{i=1}^{d} a_i^2 \in 5\mathbb{Z}$ となることと同値である.

4　自己同型 σ

格子 N の直交群 $O(N)$ 内の S_5 の元

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$$

を考える. 具体的には

$$\sigma(\beta_i) = \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

と作用する. ここで $\beta_0 = -(\beta_1 + \cdots + \beta_4)$ であり, 添え字は $\mathbb{Z}_5$ の元と考えている. N の σ による固定点は 0 のみであるので, σ の $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ 上の最小多項式 $\phi_\sigma(x)$ は円分多項式

$$\phi_\sigma(x) = \Phi_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

となる. σ は内積を保つので, 自然に N° に作用する. 従って $k \times l \cong N^\circ/N$ にも作用するが, その作用に関する固定点全体の集合は $\{\overline{\boldsymbol{0}}\} \times l$ となる. 特に $k \cong \frac{1}{2}N/N$ には非自明な固定点を持たないように作用するので, k は

$$\mathbb{Z}_2[\sigma] \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[t]/(\Phi_5(t)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_{16}$$

の部分環 $\mathbb{F}_{16}$ が作用する．実際にはその作用は推移的であり，この作用を通して

$$k \cong \mathbb{F}_{16}$$

のように k を有限体 $\mathbb{F}_{16}$ と同一視できる．

自然数 d について，k^d への σ の対角的作用を通して，k^d は $\mathbb{F}_{16}$-ベクトル空間 $\mathbb{F}_{16}^d$ となる．更に k^d の加法部分群が σ-不変であることと $\mathbb{F}_{16}$-部分空間となることは同値となる．

$\mathcal{C}$ を σ-不変な k^d の加法部分群とし，$\mathcal{D}$ を l^d の加法部分群とすれば σ-不変な $k^d \times l^d$ の加法部分群 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が得られる．このとき N^d への σ の対角作用は格子 $L_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ の isometry に自然に拡張される．実際 N^d への σ の作用は $(N^\circ)^d$ への作用に自然に拡張し，それによって $k^d \times l^d \cong (N^\circ)^d/N^d$ への σ の作用が誘導されているからである．このように σ-不変な k^d の加法部分群と l^d の加法部分群から σ を isometry にもつ N^d と $(N^\circ)^d$ の中間格子が構成される．

5　リーチ格子 Λ の構成

リーチ格子 Λ はノルム 2 の元を持たない階数 24 の偶ユニモジュラー格子として特徴付けられる．ここでは N^6 と $(N^\circ)^6$ の σ-不変な中間格子として Λ を与える．つまり k^6 の σ-不変加法部分群 $\mathfrak{C}$ と l^6 の加法部分群 $\mathfrak{D}$ で $L_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}} \cong \Lambda$ を満たすものを構成する．Λ はユニモジュラーなので $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ はどちらも自己双対である必要がある．また Λ は偶なので，$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ の元の重みは 4 の倍数でなければならない．

$\mathfrak{D}$ については，そのような符号が次の様に構成できる．$\mathfrak{D}$ を次の行列を生成行列とする $\mathbb{Z}_5$-符号とする．

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}.$$

つまり $\mathfrak{D} \cong \langle(\overline{1}, \overline{2})\rangle^3$ である．任意の $\overline{a} \in \mathbb{Z}_5$, $a \neq 0$ に対し，

$$w((0,0), (\overline{a}, 2\overline{a})) = 8$$

が成り立つので，$\mathfrak{D}$ の重み分布関数は

$$W_{\mathfrak{D}}(X) = (1 + 4X^8)^3 = 1 + 12X^8 + 48X^{16} + 64X^{24} \tag{5.1}$$

となることがわかる．よって $\mathfrak{D}$ の元の重みは 8 の倍数である．また生成行列より, $\mathfrak{D}$ は自己直交であることがわかる．実際には, $\dim_{\mathbb{Z}_5}\mathfrak{D}=3$ なので, $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{\perp}$. よって $\mathfrak{D}$ は自己双対である．

次に σ-不変な $\mathbb{Z}_2$-符号 $\mathfrak{C}$ を構成する．天下り的ではあるが, (3.1) の行列 $\overline{C}$ と次の行列 $\overline{T}$ in $M_{4,5}(\mathbb{Z}_2)$ を考える:

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}\overline{1}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{0}\\ \overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{1}\\ \overline{1}&\overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}\end{pmatrix}.$$

そして次の行列を生成行列にもつ通常の $(30,12)$-二値符号 $\mathfrak{C}'$ を考える．

$$\overline{G}'=\begin{pmatrix}\overline{C}&\overline{O}&\overline{O}&\overline{C}&\overline{T}&\overline{T}\\ \overline{O}&\overline{C}&\overline{O}&\overline{T}&\overline{C}&\overline{T}\\ \overline{O}&\overline{O}&\overline{C}&\overline{T}&\overline{T}&\overline{C}\end{pmatrix}.$$

直接計算で $\overline{G}'\,{}^t(\overline{G}')=O$ が確認できるので, $\mathfrak{C}'$ は自己直交であることがわかる．マグマを用いて, $\mathfrak{C}'$ の重み分布関数を調べると

$$W_{\mathfrak{C}'}(X)=1+90X^8+1300X^{12}+2265X^{16}+420X^{20}+20X^{24} \tag{5.2}$$

となるので, $\mathfrak{C}$ の元の重みも全て 4 の倍数である．特に $\mathfrak{C}'$ は $(30,12,8)$-二値符号である．行列 $\overline{C}$, $\overline{T}$ の行ベクトルがどちらも長さ 5 の単一パリティ検査符号の元であることに注意すると, 命題 3.1 より, k^6 の加法部分群 $\mathfrak{C}$ で $\overline{\rho}(\mathfrak{C})=\mathfrak{C}'$ を満たすものがただ一つ存在する．$\mathfrak{C}$ は k^6 の自己直交 σ-不変加法部分群で, $\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathfrak{C}=2^{12}$ なので, $\mathfrak{C}$ は自己双対である．また重み分布関数は $\mathfrak{C}'$ のものと等しいので, $\mathfrak{C}$ に属する元の重みは 4 の倍数となっていることがわかる．

こうして階数 24 の偶ユニモジュラー格子 $L_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}}$ が構成される．σ はその直交群の元である．最後に $L_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}}$ の零でない元のノルムの最小値が 4 であることを示したいが, これは命題 2.1 と $\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ の元の形を比較し, $\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ には重み 4 の元がないことを示すことで確認できる．ただその証明はテクニカルなのでここでは省略する．

6 VOA の観点から: わかったことと今後の方針

偶格子 L とその自己同型 σ があると, 格子 VOA V_L が構成され, σ は同位数の V_L の自己同型 σ に拡張できる．既約 V_L-加群は L°/L と一対一対応があり, コセットが σ-不変であれば, 対応する既約加群には σ が自然に作用する．

今 V_L^σ を V_L の σ-固定点のなす部分 VOA とする. そうするとコセットが σ-不変でなければ, 対応する既約加群は V_L^σ-加群として既約となり, コセットが σ-不変ならば対応する既約加群の σ-固有空間が V_L^σ-加群として既約となる. 更に V_L^σ の既約加群は σ^i-twisted 加群にも現れる. [DL] において σ-twisted V_L-加群の構成方法が与えられ, 任意の既約 σ^i-twisted 加群はこの方法で構成されたものと同値であることが知られている. この σ^i-twisted 加群は σ^i-不変となっており, その固有空間達も既約 V_L^σ-加群となる.

最近の進展によれば, V_L^σ の任意の加群は完全可約となる ([M], [CM]). このような VOA については, Huang ([H]) によって Verlinde 公式と呼ばれるフュージョン則と指標の間の関係式が成立することが示されており, その公式を元に Dong, Jiao, Xu ([DJX]) はテンソル圏の理論で知られている「量子次元」とフュージョン則の関係を考察し, 特に量子次元が 1 の既約加群は単純カレントと呼ばれるフュージョン代数において可逆な元を与えるものになっていることを証明した. また [DRX] において, V_L^σ の既約加群は上で構成した物に限ることもわかる.

一方, 共同研究者の Lam 氏は, Chen 氏と共に $\sqrt{2}A_2$ の場合に符号 VOA の研究を行っている ([CL]). その中で符号 $\mathcal{C}$ が自己双対であれば, $V_{L_{\mathcal{C}\times\{0\}}}^\sigma$ の任意の既約加群は単純カレントになることを示している. 本研究で構成した $\mathfrak{C}$ についても, $V_{L_{\mathfrak{C}\times\{0\}}}^\sigma$ の任意の既約加群が単純カレントであることが次の様に証明できる. 以下簡単のために $\mathcal{L} = L_{\mathfrak{C}\times\{0\}}$ とおく. $i = 1, 2, 3, 4$ に対し, σ^i-twisted $V_\mathcal{L}$-既約加群の量子次元を計算すると 1 であることがわかる. [DRX] の結果を用いると, σ^i-twisted $V_\mathcal{L}$-加群の σ^i 固有空間達の V_L^σ 加群としての量子次元も 1 となる. よってこれらは単純カレントである. また $V_\mathcal{L}$ の任意の既約加群は $\mathcal{L}^\circ = L_{\mathfrak{C}\times l^6}$ の $\mathcal{L}$ による商 l^6 に対応しているが, l 上 $\sigma \in S_5$ は自明に作用していたので l^6 に属するコセットに対応する既約加群は全て σ-不変である. その σ-固有空間達の $V_\mathcal{L}^\sigma$ 上の量子次元も全て 1 となり, 単純カレントであることがわかる.

$|\mathcal{L}^\circ/\mathcal{L}| = 5^6$, なので, $\mathcal{L}^\circ/\mathcal{L}$ のコセットから得られる既約 $V_\mathcal{L}$-加群は 5^7 個存在する. 各 $i = 1, 2, 3, 4$ について既約 σ^i-twisted $V_\mathcal{L}$-加群は $|\mathcal{L}/(1-\sigma)\mathcal{L}| = 5^6$ 個存在し, 各々が σ-の固有空間として 5 個の既約加群 $V_\mathcal{L}^\sigma$-加群に分解するので, $4 \cdot 5^7$ 個の既約加群が得られる. このように得られる既約加群達はすべて非同値であるので, $V_\mathcal{L}^\sigma$-加群は全部で 5^8 個存在する.

以下の考察は現段階では予想であるが, V_Λ は $V_\mathcal{L}$-加群として, $\mathfrak{D}$ に対応するコセットの直和に分解する. $|\mathfrak{D}| = 5^3$ なので, σ^i-twisted V_Λ-加群 $(i = 1, 2, 3, 4)$ は $4 \times 5^6/5^3 = 4 \times 5^3$ 個存在すると考えられる. これらの整数共形重みからなる既約 V_Λ^σ-加群（これは σ 固定点でもある) は 4×5^3 個でこれらすべてを V_Λ^σ に直和するとムーンシャイン加群 $V^\natural$ に同型となると予想

される．実際 σ-twisted $V_{\mathcal{L}}$-加群の最低整数共型ウェイトは 2 なのでこれらの直和に共型ウェイト 1 の元は現れない．よって FLM 予想のもとではこの直和が VOA となれば $V^\natural$ と同型となるのである．この $V^\natural$ を $V_{\mathcal{L}}^{\sigma}$-加群と見たときには 5^4 個単純カレントの直和となり, $V_{\mathcal{L}}^{\sigma}$ の自己同型群がモンスター群の $(5B)^4$ の正規化群と関係していることが予想される．

References

[CL] H.Y. Chen, C.H. Lam, Quantum dimensions and fusion rules of the VOA $V^{\tau}_{L\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$, *J. Algebra*, **459**, 309–349 (2016).

[CM] S. Carnahan, M. Miyamoto, Regularity of fixed-point vertex operator subalgebras, arXiv:1603.05645.

[DJX] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, Quantum dimensions and quantum Galois theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, no. 12, 6441–6469 (2013).

[DL] C. Dong and J. Lepowsky, The algebraic structure of relative twisted vertex operators, *J. Pure, Appl. Math.*, **110**, 259–295 (1996).

[DRX] C. Dong, L. Ren, F. Xu, On orbifold theory, arXiv:1507.03306.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol.**134**, Academic Press, Boston, 1988.

[H] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture. *Commun. Contemp. Math.* **10**, no. 1, 103–154, (2008).

[LS] C.-H. Lam, H. Shimakura, On Z3-orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra, arXiv:1606.05961.

[L] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **82**, 8295–8299, 1985.

[M] M. Miyamoto, C_2-cofiniteness of cyclic-orbifold models, *Comm. Math. Phys.* **335**, no. 3, 12791286, (2015).