頂点作用素代数構造の一意性について

森脇湧登 (東京大学大学院数理科学研究科)

2016 年 8 月

1　はじめに

頂点代数の概念は共形ベクトルと共に Borcherds によって導入された [B]。共形ベクトルは頂点代数の中のある性質を満たす元であり、その存在は二次元共形場理論が Virasoro 代数の対称性を持つことと関係している。頂点作用素代数とは頂点代数と共形ベクトルの組のことであり、Frenkel、Lepowsky、Meurman は $V^\natural$ と呼ばれる頂点代数の自己同型群のある共形ベクトルに関する固定部分群 (頂点作用素代数としての自己同型群) が散在型の有限単純群であるモンスター群になることを示した [FLM]。VOA の理論において共形ベクトルを分類することは基本的な問題であり、最も単純な 1 次元 Heisenberg 頂点代数の場合は松尾、永友によって 2 つのパラメータをもつ集合として全ての共形ベクトルが記述された [MN]。特に頂点代数の自己同型が共形ベクトルを共形ベクトルに移すことから 1 次元 Heisenberg 頂点代数の場合には自己同型群が決定されている。

しかし一般には無限に多くのパラメータが必要なため、頂点代数の自己同型群を決定するのは難しく、特に $V^\natural$ の頂点代数としての自己同型群は分かっていない。本稿では頂点代数としての自己同型群がある自然な性質を満たす共形ベクトルたちの集合へ推移的に作用することを紹介する。また二つの共形ベクトルが自己同型で移りあうときに限りそれらの共形ベクトルによって定まる頂点作用素代数は同型になるため、頂点作用素代数構造の一意性という本稿のタイトルはこの事実を意味している。さらにこの作用を通じてある種の頂点代数の自己同型群の構造に関する定理が得られることを見る。また特別な頂点代数に関しては具体的に自己同型を決定することができる。この結果の系として実数体上 $V^\natural$ を考えるとその全自己同型はモンスター単純群であることがわかる。

2　共形ベクトル

初めに頂点代数に関する基本的な用語を説明する。

2.1 頂点代数と頂点作用素代数

V を頂点代数とする。すなわち V 上には真空と呼ばれる元 $\mathbf{1} \in V$ と可算個の積 $n : V \to V$ $a, b \mapsto a(n)b$ $(n \in \mathbb{Z})$ (n-積) が与えられ、これらの積が Borcherds 恒等式や真空元に関する公理を満たすとする。

定義 1. 頂点代数の元 $a \in V$ が以下の条件を満たすとき *(CFT type の)* 共形ベクトルであるという。

(1) あるスカラー $c \in \mathbb{C}$ が存在して、*Virasoro* 関係式

$$[a(n), a(m)] = (n-m)a(n+m) + (n^3 - n)/12c$$

を満たす。

(2) 任意の $b \in V$ に対して $a(0)b = b(-2)1$ を満たす。

(3) 作用素 $a(1)$ は対角化可能でその固有空間として $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ と分解し、各固有空間 V_n は有限次元、$V_0 = \mathbb{C}1$ が成り立つ。

また頂点代数 V と共形ベクトル a の組 (V, a) を頂点作用素代数 (CFT type) と呼ぶ。

以下 V と書いたら頂点代数、(V, a) とかいたら頂点作用素代数を表すものとする。

2.2 頂点作用素代数の間の射と自己同型

V, W が頂点代数とする。線形写像 $f : V \to W$ が $f(1) = 1$、$f(a(n)b) = f(a)(n)f(b)$(任意の $a, b \in V$) を満たすとき頂点代数の準同型写像と呼ぶ。また $(V, a), (W, b)$ が頂点作用素代数のとき、V から W への準同型であって $f(a) = b$ を満たすものを頂点作用素代数の準同型という。

ここで頂点代数の自己同型のなす群を $\mathrm{Aut}\,V$ で表し、頂点作用素代数の自己同型のなす群を $\mathrm{Aut}\,(V, a)$ であらわす。

2.3 自己双対性と共形ベクトルのなす集合

頂点作用素代数 (V, a) とその許容加群 $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ が与えられたとき、その双対加群 M' を考えることができる。V をそれ自身加群と思ったときに V と V' が V 加群として同型ならば V は自己双対な頂点作用素代数であるという。

定理 2.1. *[Li]* 単純な頂点作用素代数 (V, a) が自己双対であることと $a(1)V_1 = 0$ であることは同値

Li の結果をみても分かる通り共形ベクトルは必ずしも自己双対な頂点作用素代数を与えるとは限らない。

さて　$CV_{sd} = \{a \in V \mid a$ は共形ベクトルであって (V, a) は自己双対な頂点作用素代数 $\}$ とおく。

自己同型群は代数構造を保つため CV_{sd} は $\mathrm{Aut}\,V$ の作用によって不変な集合になる。以下の章ではこの作用を調べる。

3　頂点作用素代数構造の一意性

二つの元 $a, b \in CV_{sd}$ が与えられたとき、それらに対応する頂点作用素代数が同型になるか？という問題が考えられる。ただちに分かるようにこれらが同型であることとある $f \in \mathrm{Aut}\,V$ によって $f(a) = b$ とかけることは同値であるから、問題は $\mathrm{Aut}\,V$ の CV_{sd} への作用が推移的であるか？と言い換えることができる。

我々の主定理は

定理 3.1. 頂点代数 V を単純とする。このとき $\mathrm{Aut}\,V$ は CV_{sd} に推移的に作用する。

すなわち単純頂点代数に与えられる自己双対な頂点作用素代数の構造は同型をのぞき一意である。

特に正則頂点作用素代数と呼ばれる既約加群が自分自身に限るような頂点作用素代数においては頂点代数はいつでも自己双対になるため全ての頂点作用素代数構造は同型をのぞき一意に定まる。

例えばアファイン頂点作用素代数、Heisenberg 頂点作用素代数、Virasoro 頂点作用素代数など知られている多くの頂点代数は自己双対な共形ベクトルを持っている。

4　自己同型群の構造

以下 (V, ω) は単純自己双対頂点作用素代数とする。

4.1　分解定理

定理 3.1 から $\mathrm{Aut}\,V$ は CV_{sd} に推移的に作用するため、その作用を調べることで $\mathrm{Aut}\,V$ をその三つの部分群の積に分解することができる。

$\mathrm{Aut}\,(V, \omega) = \{f \in \mathrm{Aut}\ V \mid$ 任意の n に対して $f(V_n) = V_n\}$ であることに注意して $\mathrm{Aut}^{+}_{\omega}\,V$、$\mathrm{Aut}^{-}_{\omega}\,V$ を次のように定義する。

$$\mathrm{Aut}^+_\omega V := \{ f \in \mathrm{Aut}\, V \mid f(V_n) \subset \bigoplus_{k \geq n} V_k \text{ と } pr_n \circ f|_{V_n} = \mathrm{id}_{V_n} \text{ が任意の自然数 } n \text{ に成立する} \},$$

$$\mathrm{Aut}^-_\omega V := \{ f \in \mathrm{Aut}\, V \mid f(V_n) \subset \bigoplus_{k \leq n} V_k \text{ と } pr_n \circ f|_{V_n} = \mathrm{id}_{V_n} \text{ が任意の自然数 } n \text{ に成立する} \}$$

このとき、

定理 4.1. 任意の $f \in \mathrm{Aut}\ V$ に対して次の一意な $g \in \mathrm{Aut}^+_\omega\ V$、$h \in \mathrm{Aut}\ (V, \omega)$、$k \in \mathrm{Aut}^+_\omega\ V$ で $f = ghk$ を満たすものが存在する。

5 正定値な自己双対頂点作用素代数の自己同型群

この節では実数体 $\mathbb{R}$ 上の頂点作用素代数を考える。(V, ω) が単純自己双対頂点作用素代数のとき V 上には不変双線型形式が存在するがそれが正定値な時に正定値な自己双対頂点作用素代数という。

定理 5.1. (V, ω) が正定値な自己双対頂点作用素代数であるとする。このとき $\mathrm{Aut}\ V \cong \mathrm{Aut}^-_\omega\ V \rtimes \mathrm{Aut}\ (V, \omega)$ が成り立つ。

$V^\natural$ 上の不変双線型形式は正定値であるから上記の定理から次の系が従う。

系 5.1. 実数体上のムーンシャイン加群 $V^\natural$ の頂点代数としての自己同型はモンスター群である。

参考文献

[1] [B] R.E. Borcherds: Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster, *Proc. Nat ’l. Acad. Sci. USA.* 83 (1986) 3068―3071

[2] [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, *Academic Press, Boston* 1988.

[3] [MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, A note on free bosonic vertex algebra and its conformal vectors, *J. Algebra* 212(1999), 395-418.

[4] [Li] H. Li, Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, *Pure and Appl. Math.* 96 (1994), 279-297.