New m-ovoids of finite polar spaces

–有限極空間の新たな m-ovoid について–

熊本大学 教育学部　　籾原　幸二*

Koji Momihara

Department of Mathematics, Faculty of Education,

Kumamoto University

概 要

m-ovoid の概念は, 有限射影幾何学で古典的に扱われてきた ovoid の概念の, 有限極空間上への一般化として定義される. この論文では, hemisystem と呼ばれる Hermitian 曲面 (一般化四角形) の上で定義される幾何構造の双対として定義される, $\frac{q+1}{2}$-ovoid の新たな無限系列の存在についての結果について概説する.

キーワード: m-ovoid, 一般化四角形, 強正則グラフ, アソシエーションスキーム, hemisystem

1　導入

この論文は, John Bamberg 氏, Melissa Lee 氏 (University of Western Australia), Qing Xiang 氏 (University of Delaware) との共同研究によるものである. いくつか証明を省く命題があるが, 詳しくは論文 [4] を参照していただきたい.

有限極空間 $\mathcal{P}$ に対し, その最高次元の部分空間のことを極大空間と呼ぶ. $\mathcal{P}$ の点集合の部分集合 $\mathcal{O}$ が, 任意の極大空間とちょうど m 点を共有するとき, $\mathcal{O}$ は m-ovoid と呼ばれる. この研究分野における大きな問題は, m-ovoid の存在・構成・分類である. 特に, 1-ovoid は, 射影幾何学 (およびデザイン論) で古典的に研究されてきた ovoid の概念の極空間上への一般化であり, さらに重複数に関して一般化させたものが m-ovoid である. これまでの研究経緯に関しては, 文献 [3] を参照していただきたい.

この論文では特に, $\mathbb{F}_q$ 上の 6 次元 elliptic 型の二次形式の零点から得られる極空間 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の m-ovoid に興味がある. この極空間の点と直線 (極大空間) は一般化四角形を成す. また, 一般化四角形の双対性から, 点と直線をそれぞれ $\mathbb{F}_{q^2}$ 上の 3 次元 Hermitian 空間 $\mathsf{H}(3,q^2)$ 上の直線 (極大空間) と点へ写すことができる. このとき, m-ovoid の概念は, $\mathsf{H}(3,q^2)$ の直線の集合で, 任意の点をちょうど m 回通るもの (m-cover と呼ばれる) に写ることになる.

[1] 〒 860-8555, 熊本県熊本市黒髪 2-40-1, 熊本大学教育学部, Email: momihara@educ.kumamoto-u.ac.jp

Segre [9] および Bruen-Hirschfeld [7] により, $\mathsf{H}(3,q^2)$ の m-cover は $m=(q+1)/2$ の場合以外存在しないことが示された．この m-cover を, hemisystem とよぶ．また, Segre は $q=3$ の場合に, それを発見した．しかしながら, その後 30 年間, その他の q で hemisystem を発見できなかったことから, hemisystem は $q=3$ 以外存在しないと予想されてきた (Thas [10])．しかしながら, 2005 年, Cossidente-Penttila [8] は, すべての奇素数ベキ q で hemisystem を構成することに成功し, その予想の反例を与えた．彼らの作った hemisystem には $\mathsf{P\Omega}^-(4,q)$ という非常に大きな群が作用している．一方, Bamberg-Giudici-Royle [2] は, 位数 q^2-q+1 という比較的小さな巡回群を自己同型群にもつ異なる hemisystem を, $q\in\{7,9,11,17,19,23,27\}$ に対し発見した．本研究の目的は, これらのうち, $q\equiv 3 \pmod 4$ の場合の hemisystem を無限系列に一般化することである．

既に述べたように, $\mathsf{H}(3,q^2)$ 上の hemisystem は, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の $(q+1)/2$-ovoid として解釈できる．よって, 本論文の主定理は以下のようになる．

定理 1.1. *$q\equiv 3 \pmod 4$ なる任意の素数ベキに対し, 位数 q^2-q+1 の巡回群を自己同型群に持つ, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の $(q+1)/2$-ovoid が存在する．*

2 準備

2.1 m-ovoid と強正則グラフ

知られている一般化四角形のいくつかからは, 点をグラフの点, 2 点が同一直線上に乗るとき辺を結ぶことで, 強正則グラフが得られる．また, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の $(q+1)/2$-ovoid は, 点集合のちょうど半分からなり, その補集合も $(q+1)/2$-ovoid となり, 強正則グラフをそれぞれの $(q+1)/2$-ovoid 上へ制限することで, 完全グラフの 4 つの部分グラフへの分解ができる．実は, 各々は強正則グラフとなり, 特別なアソシエーションスキームを成すことが知られている [11].

一方, この幾何構造を直接グラフに対応させずに, 有限体上のベクトル空間の部分集合として解釈することでも強正則グラフが得られる．今, 簡単のため, 極空間は $\mathcal{Q}^-(5,q)$ とする．このとき, $\mathcal{O}$ は, $\mathbb{F}_q$ 上の 5 次元射影空間 $\mathrm{PG}(5,q)$ の点集合なので,

$$\mathcal{M} := \{\lambda x : \lambda\in\mathbb{F}_q^*, \langle x\rangle\in\mathcal{O}\} \tag{2.1}$$

と定めると, $\mathcal{M}$ は $\mathbb{F}_q$ 上の 6 次元ベクトル空間 V の部分集合として解釈できる．ここで, グラフの点集合を V の元と同一視し, 2 つの元 x,y に対し, $x-y\in\mathcal{M}$ のとき対応する 2 点を辺で結んで得られるグラフが, 強正則グラフとなる．ここで, このグラフを $\mathrm{Cay}(V,\mathcal{M})$ と書き, ケーリーグラフと呼ぶ．よって, このグラフの非自明な固有値は, 2 種類となる．特に, このケーリーグラフの非自明な固有値は, 集合 $\mathcal{M}$ の非自明な指標値で与えられるため, 以下の補題が成り立つ．

補題 2.1. *$\mathcal{O}$ を $\mathcal{Q}^-(5,q)$ の $(q+1)(q^3+1)/2$ 点集合とし, $\mathcal{M}$ を式 (2.1) で定義される V の部分集合とする．このとき, $\mathcal{O}$ が $(q+1)/2$-ovoid であるための必要十分条件は, 任意の点 $P\in\mathrm{PG}(5,q)$*

に対し,

$$\psi(\mathcal{M})=\begin{cases}-q^3+(q^2-1)/2, & P\in\mathcal{M}\text{ のとき},\\ (q^2-1)/2, & \text{その他}\end{cases}$$

が成立することである. ここで, ψ は V の非自明な指標でかつ, $P^\perp$ 上で自明な指標とする.

この補題で, $P^\perp$ は, この極空間に付随する双線形形式 B に対し, $P^\perp=\{x:B(x,P)=0\}$ として定義され, $\mathrm{PG}(5,q)$ の超平面に対応する.

2.2 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ のあるモデル

この論文では, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の m-ovoid を構成することが目的であるので, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ のあるモデルを固定し, その上で構成法を与える.

今, $\mathbb{F}_{q^6}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の 6 次元ベクトル空間とみなす. また, 写像 $Q:\mathbb{F}_{q^6}\to\mathbb{F}_q$ を

$$Q(x):=\mathrm{Tr}_{q^3/q}(x^{q^3+1})$$

で定義する. このとき, Q は elliptic 型の非退化な二次形式を与える. よって, 集合 $\{\langle x\rangle : x\in\mathbb{F}_{q^6}^*, Q(x)=0\}$ が $\mathcal{Q}^-(5,q)$ を与える. ここで, 点 $P=\langle x\rangle$ に対し, $P^\perp$ は $P^\perp=\{\langle y\rangle : \mathrm{Tr}_{q^6/q}(yx^{q^3})=0\}$ で与えられる.

さらに, 補題 2.1 の条件は,

$$\psi_a(\mathcal{M})=\begin{cases}-q^3+(q^2-1)/2, & a^{q^3}\in\mathcal{M}\text{ のとき},\\ (q^2-1)/2, & \text{その他}\end{cases}\tag{2.2}$$

と書き換えることができる. ここで, $\psi_a(x)$ は $\psi_a(x)=\psi_{\mathbb{F}_{q^6}}(ax)$ と定め, $\psi_{\mathbb{F}_{q^6}}$ は $\mathbb{F}_{q^6}$ の標準加法的指標とする.

3 内部にある幾何構造とアソシエーションスキーム

$\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の m-ovoid を構成する前に, その内部に埋め込む小さな幾何構造について言及する必要がある.

ω を $\mathbb{F}_{q^3}$ の原始根とし, $N:=q^2+q+1$ とする. $\mathbb{F}_{q^3}$ を $\mathbb{F}_q$ 上の 3 次元ベクトル空間と解釈し, $\mathrm{PG}(2,q)$ の点集合を $\mathbb{F}_{q^3}^*/\mathbb{F}_q^*$ と解釈する. $\mathrm{PG}(2,q)$ の点を $\langle\omega^i\rangle$, $0\le i\le N-1$ と表記すると, $\mathrm{PG}(2,q)$ の直線は

$$L_c:=\{\langle x\rangle :\ \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^c x)=0\},\ \ 0\le c\le N-1$$

で与えられる.

ここで, 写像 $f:\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{F}_q$ を $f(x):=\mathrm{Tr}_{q^3/q}(x^2)$ で定めると, これは非退化な二次形式を与える. 対応する双線形形式 $B:\mathbb{F}_{q^3}\times\mathbb{F}_{q^3}\to\mathbb{F}_q$ は $B(x,y)=2\mathrm{Tr}_{q^3/q}(xy)$ で与えられる. このとき, $C=\{\langle x\rangle : f(x)=0\}$ は, $\mathrm{PG}(2,q)$ の conic と呼ばれ, $q+1$ 点から成る. 特に, 各直線は, この conic と 0, 1 または 2 点で交わり, それぞれの直線は exterior, tangent, secant と呼ばれる. また, 各点には 0 本か 2 本の tangent な直線が通っており, それぞれ interior, exterior な点と呼ばれる.

今, この conic に付随するアソシエーションスキームを考える. $\mathbb{Z}_N$ の部分集合

$$I_C=\{i:\, 0\le i\le N-1,\ \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{2i})=0\}=\{d_0,d_1,\ldots,d_q\}$$

を考える. ここで, d_i の添え字は適当な順序で付けておく. 明らかに, $C=\{\langle\omega^{d_i}\rangle:\, 0\le i\le q\}$ となる. また, $\mathbb{Z}_N$ の部分集合

$$S:=\{i\,(\mathrm{mod}\ N):\ \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^i)=0\}$$

は, 直線 $L_0=\{\langle\omega^i\rangle:\, i\in S\}$ に対応し, また. $I_C\equiv 2^{-1}S\pmod N$ が得られる. S は Singer 差集合とも呼ばれている.

各 $x\in\mathbb{F}_{q^3}$ に対し, x の符号 $\mathrm{sgn}(x)\in\{0,1,-1\}$ を以下で定める.

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\text{ が非零平方元},\\ -1, & x\text{ は非平方元},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

このとき, 以下が成立する.

補題 3.1. *(1) B によって誘導される $\langle\omega^c\rangle$ と L_c の間の polarity は, C 上の点を tangent な直線へ, exterior (interior) な点を secant (exterior) な直線へ写す.*

(2) $P=\langle x\rangle\notin C$ なる点 P に対し, P が exterior (interior) であるための必要十分条件は, $\mathrm{sgn}(f(x))=\epsilon$ $(-\epsilon)$ となることである. ここで, $q\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)$ か $3\,(\mathrm{mod}\ 4)$ に応じて, $\epsilon=1,-1$ とする.

この補題より,

$$\begin{aligned}
L_c\text{ が tangent} &\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(f(\omega^c))=0 &&\Leftrightarrow |(S-c)\cap I_C|=1,\\
L_c\text{ が exterior} &\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(f(\omega^c))=-\epsilon &&\Leftrightarrow |(S-c)\cap I_C|=0,\\
L_c\text{ が secant} &\Leftrightarrow \mathrm{sgn}(f(\omega^c))=\epsilon &&\Leftrightarrow |(S-c)\cap I_C|=2
\end{aligned}$$

が成立する.

今, $C_i^{(N,q^3)}=\langle\omega^i\rangle$ とし, $D_1:=\bigcup_{i\in I_C}C_i^{(N,q^3)}$ とおくと, ちょうど 3 つの指標値を持つ. 実際,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_C}\psi_{\mathbb{F}_{q^3}}(\omega^c C_i^{(N,q^3)}) &= \sum_{i\in I_C}\psi_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{c+i})\mathbb{F}_q^*)=q|(S-c)\cap I_C|-(q+1)\\
&=\begin{cases}-1, & c\,(\mathrm{mod}\ N)\in I_C\text{ のとき},\\ -1+\epsilon q, & c\,(\mathrm{mod}\ N)\in I_s\text{ のとき},\\ -1-\epsilon q, & c\,(\mathrm{mod}\ N)\in I_n\text{ のとき}\end{cases}
\end{aligned}\tag{3.1}$$

となる． ここで，$C_0^{(2,q)}$ を $\mathbb{F}_q$ の非零平方元の集合，$C_1^{(2,q)}$ を非平方元の集合とし，$I_s = \{i \pmod N) : \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{2i}) \in C_0^{(2,q)}\}$, $I_n = \{i \pmod N) : \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{2i}) \in C_1^{(2,q)}\}$ と定める．

注意 3.2. 以下の $\mathbb{F}_{q^3}$ の分割を考える:

$$D_0 := \{0\},\ D_1 := \bigcup_{i\in I_C} C_i^{(N,q^3)},\ D_2 := \bigcup_{i\in I_s} C_i^{(N,q^3)},\ D_3 := \bigcup_{i\in I_n} C_i^{(N,q^3)}.$$

このとき, ケーリーグラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_{q^3}, D_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ は, $\mathbb{F}_{q^3}$ 上の 3 クラスのアソシエーションスキームを与える [6].

このアソシエーションスキームは古典的によく知られたものであるが, この fission スキームとして新しいものを発見した. そして, このアソシエーションスキームが, 今回構成する m-ovoid の背後に現れる.

今から, D_1 のある分割を考える. $d_0 \in I_C$ に対し,

$$\mathcal{X} := \{\omega^{d_i}\mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{d_0+d_i}) : 1 \le i \le q\} \cup \{2\omega^{d_0}\}$$

と

$$X := \{\log_\omega(x) \pmod{2N} : x \in \mathcal{X}\} \subset \mathbb{Z}_{2N}$$

を考える. 明らかに, $X \equiv I_C \pmod N$ が成立する.

注意 3.3. (i) $\mathcal{X}$ の定義において, d_0 の代わりに d_i を用いた場合, 得られる集合 X' に対し, $X' \equiv X \pmod{2N}$, または, $X' \equiv X + N \pmod{2N}$ が成立する.

(ii) 集合 X は, $2N$ を法として, q の積で不変である.

集合 X は

$$X = 2S_1'' \cup (2S_2'' + N) \pmod{2N} \tag{3.2}$$

と偶数部分と奇数部分に分割できる. 特に, $|S_1''| + |S_2''| = q+1$ は明らか. また, $S_i' \equiv 2S_i'' \pmod N$ と $S_i \equiv 2S_i' \pmod N$ に対し, $S_1' \cup S_2' \equiv I_C \pmod N$ と $S_1 \cup S_2 \equiv S \pmod N$ が成立する. よって, conic と Singer 差集合の分割が得られる.

ここで, 以下の D_1 の分割を考える:

$$D_{1,1} := \bigcup_{i\in X} C_i^{(2N,q^3)},\ \ D_{1,2} := \bigcup_{i\in X+N} C_i^{(2N,q^3)}.$$

このとき, 以下の定理が成立する.

定理 3.4. 集合 $D_{1,1}$ は, ちょうど 4 つの指標値をもつ. 特に,

$$\psi_{\mathbb{F}_{q^3}}(\omega^c D_{1,1}) = \begin{cases} \frac{-1+\eta(2)qG_q(\eta)}{2}, & c \pmod N \in I_C \text{ かつ } c \pmod{2N} \in X, \\ \frac{-1-\eta(2)qG_q(\eta)}{2}, & c \pmod N \in I_C \text{ かつ } c \pmod{2N} \in X+N, \\ \frac{-1+\epsilon q}{2}, & c \pmod N \in I_s, \\ \frac{-1-\epsilon q}{2}, & c \pmod N \in I_n \end{cases}$$

が成立する. ここで, $G_q(\eta)$ は $\mathbb{F}_q$ の平方剰余記号 η に対するガウス和を意味する.

注意 3.5. ケーリーグラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_{q^3}, D_i)$ $(i=0,2,3)$ と $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_{q^3}, D_{1,j})$ $(j=1,2)$ は $\mathbb{F}_{q^3}$ 上の 4 クラスのアソシエーションスキームを成す．これは, 注意 3.2 のアソシエーションスキームの fission スキームを与える．

4 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の $(q+1)/2$-ovoid の構成法

以下, $q \equiv 3 \pmod 4$ とする．双線形形式

$$B(x,y) := \mathrm{Tr}_{q^6/q}(xy^{q^3})$$

に付随する $\mathbb{F}_{q^6}$ から $\mathbb{F}_q$ への二次形式は, $Q(x) = \mathrm{Tr}_{q^3/q}(x^{q^3+1})$ であり, 非退化かつ elliptic である．よって, この二次形式が, elliptic な直交空間 $\mathcal{Q}^-(5,q)$ を与える．

これまでの議論より, $\{x \in \mathbb{F}_{q^6}^* : \mathrm{Tr}_{q^3/q}(x^{q^3+1}) = 0\}$ の「良い」部分集合を選ぶことが本質的である．

構成法 4.1. 集合 S_1 と S_2 を, 式 (3.2) で定義された S_1'', S_2'' に基づく *Singer* 差集合 S の分割とする．また, $J_1 = \{0,3\}$, $J_2 = \{1,2\}$ とし,

$$I = \{Ni - (q+1)j \pmod{4N} : (i,j) \in (J_1 \times S_1) \cup (J_2 \times S_2)\}$$

とおく．このとき,

$$\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} C_i^{(4N,q^6)}$$

と定める．ここで, $C_i^{(4N,q^6)} := \gamma^i C_0$ とする．また, C_0 は $\mathbb{F}_{q^6}^*$ の指数 $4N$ の部分群, γ は $\gamma^{q^3+1} = \omega$ を満たす $\mathbb{F}_{q^6}$ の原始根とする．

構成法より, $|\mathcal{M}| = (q^3+1)(q^2-1)/2$ は明らかである．また, $\mathcal{M}$ は $\{x \in \mathbb{F}_{q^6} : \mathrm{Tr}_{q^3/q}(x^{q^3+1}) = 0\}$ の部分集合である．実際, 任意の $x = \gamma^{Ni-(q+1)j+s} \in \mathcal{M}$(ここで, $\gamma^s \in C_0^{(4N,q^6)}$ とする) に対し,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{q^3/q}(\gamma^{(Ni-(q+1)j+s)(q^3+1)}) &= \mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{Ni-(q+1)j+s}) \\
&= \omega^{Ni+s-Nj}\mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{Nj-(q+1)j}) \\
&= \omega^{Ni+s-Nj}\mathrm{Tr}_{q^3/q}(\omega^{j}) = 0
\end{aligned}$$

が満たされる．

本論文の主定理は以下のようになる．

定理 4.2. 構成法 *4.1* における集合 $\mathcal{M}$ に対応する $\mathrm{PG}(5,q)$ の点集合 $\mathcal{O}$ が, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ の $(q+1)/2$-*ovoid* を成す．特に, $C_3 \ltimes C_{(q^3+1)/4}$ を自己同型群として含む．

定理は, 式 (2.2) に基づき, その指標値の計算を行うことによって証明される．ここで, 指標値は, 指標の直交性を用いて,

$$\psi_{\mathbb{F}_{q^6}}(\gamma^a \mathcal{M}) = \frac{1}{4N} \sum_{h=0}^{4N-1} G_{q^6}(\chi_{4N}^h) \sum_{i \in I} \chi_{4N}^{-h}(\gamma^{a+i}) \tag{4.1}$$

のように変形される．ここで, χ_{4N} は位数 $4N$ の乗法的指標, $G_{q^6}(\chi_{4N})$ は χ_{4N} に付随する $\mathbb{F}_{q^6}$ 上のガウス和である．残りの指標値の計算の詳細は, 論文 [4] に譲ることにして, その大まかな計算のアイデアと流れについて簡単に説明する．

式 (4.1) より, 指標値の計算は, 位数 $4N$ のガウス和の計算が本質的になるが, 直接的な計算は非常に難しい．しかし, 以下の定理を利用すると, 式変形のみで指標値の計算ができる．

定理 4.3. $q = p^f$ を $q \equiv 3 \pmod 4$ なる素数ベキ, m を $N = q^2 + q + 1$ を割る奇数とする．χ'_m を $\mathbb{F}_{q^3}$ の位数 m の乗法的指標とし, χ_m をその $\mathbb{F}_{q^6}$ へのリフトとする．また, χ_4 を $\mathbb{F}_{q^6}$ の位数 4 の乗法的指標とする．このとき, $G_{q^6}(\chi_4\chi_m) = G_{q^6}(\chi_4^3\chi_m)$ が成立する．特に,

$$G_{q^6}(\chi_4\chi_m) = \rho_q G_{q^3}({\chi'}_m^4) G_{q^3}({\chi'}_m^{-2}) \tag{4.2}$$

が成り立つ．ここで, $q \equiv 3 \pmod 8$ または $q \equiv 7 \pmod 8$ に応じて, $\rho_q = -1$ または 1 とおく．

このガウス和に対する公式の証明は, 良く知られた Davenport-Hasse のリフトの公式と積公式を応用し証明される．詳しくは, [4] を参照してほしい．この公式は非常に強力で, 拡大体上のガウス和の計算を, 部分体 $\mathbb{F}_{q^3}$ 上の位数 N のガウス和に落とし込むことができることを意味する．あとは, 前章で議論した新しいアソシエーションスキームの指標表を利用して, 残りの指標値の計算ができるという流れになっている．

最後に, 得られた m-ovoid の新規性についてであるが, 既存の $(q+1)/2$-ovoid の全自己同型群の情報はかなり詳細に調べられており ([1, 5] を参照), 位数 $q^2 - q + 1$ の巡回群を自己同型群に含むことができないことを証明できる．例えば, Cossidente-Penttila [8] の $(q+1)/2$-ovoid は, $\mathsf{P\Sigma L}(2, q^2)$ の作用で不変であることが示されているが, その位数は $q^2(q^4 - 1)\log_p(q)$ であり, $q^2 - q + 1$ では割れない．また, 一般に, Bamberg-Giudici-Royle [1] の $(q+1)/2$-ovoid は, 位数 q^2 の基本可換群を自己同型群に含む．もし, 我々の $(q+1)/2$-ovoid が位数 $q^2(q^2 - q + 1)$ の基本可換群を自己同型群に含めば, $\mathsf{SU}(3, q)$ を自己同型群にしめされる．一方, $\mathsf{SU}(3, q)$ は $\mathcal{Q}^-(5, q)$ の点上可移に作用するので, あり得ないことがわかる．

5 いくつかの問題

この章では, $(q+1)/2$-ovoid に関連した未解決問題を挙げる．

文献 [2] で, 以下の表に示すように, 位数 $q^2 - q + 1$ の巡回群を自己同型群にもつ $(q+1)/2$-ovoid の例がいくつか発見された．

q	q^2-q+1	Stabiliser
3	7	$\mathrm{PSL}(3,4).2$
5	21	$3\cdot A_7\cdot 2$
7	43	$43:6$
9	73	$73:6$
11	111	$111:6$, $333:3$
17	273	$273:3$
19	343	$1715:6$
23	507	$507:6$
27	703	$703:3$

ここで, $q=13,25$ に対しては, 存在しないことに注意する. よって, 自然な推測として, $q\equiv 1\pmod{12}$ の場合は存在しないと予想される. また, 本論文では, $q\equiv 3\pmod 4$ なる場合に一般化を与えた. よって, 以下の問いが自然に生じる.

問題 5.1. $q\equiv 5,9\pmod{12}$ なる素数ベキ q に対し, 位数 q^2-q+1 の巡回群を自己同型群にもつ, $\mathcal{Q}^-(5,q)$ 上の $(q+1)/2$-*ovoid* を構成せよ.

この問いに対し, 本論文の手法は全く通用せず, 解決の糸口が全く得られていない状態である. この問いを未解決問題として挙げ, 本論文を閉じることとする.

参考文献

[1] J. Bamberg, M. Giudici, G. F. Royle, Every flock generalized quadrangle has a hemisystem, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **42**, 795–810, (2010).

[2] J. Bamberg, M. Giudici, G. F. Royle, Hemisystems of small flock generalized quadrangles, *Des. Codes Cryptogr.*, **67** 137–157, (2013).

[3] J. Bamberg, S. Kelly, M. Law, T. Penttila, Tight sets and m-ovoids of finite polar spaces, *J. Combin. Theory Ser. A*, **114** 1293–1314, (2007).

[4] J. Bamberg, M. Lee, K. Momihara, Q. Xiang, A new infinite family of hemisystems of the Hermitian surface, *Combinatorica*, to appear.

[5] J. Bamberg, T. Penttila, Overgroups of cyclic Sylow subgroups of linear groups, *Comm. Algebra*, **36**, 2503–2543, (2008).

[6] E. Bannai, O. Shimabukuro, H. Tanaka, Finite euclidean graphs and ramanujan graphs, *Discr. Math.*, **309**, 6126–6134, (2009).

[7] A. A. Bruen, J. W. P. Hirschfeld, Applications of line geometry over finite fields. II. The Hermitian surface, *Geom. Dedicata*, **7**, 333–353, (1978).

[8] A. Cossidente, T. Penttila, Hemisystems on the Hermitian surface, *J. London Math. Soc. (2)*, **72**, 731–741, (2005).

[9] B. Segre, Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **70**, 1-201, (1965).

[10] J. A. Thas, Projective geometry over a finite field, In *Handbook of incidence geometry*, 295–347. North-Holland, Amsterdam, (1995).

[11] E. R. van Dam, W. J. Martin, M. Muzychuk, Uniformity in association schemes and coherent configurations: cometric Q-antipodal schemes and linked systems, *J. Combin. Theory Ser. A*, **120**, 1401–1439, (2013).