Schur relations for association schemes and related topics

花木章秀 (信州大学理学部, hanaki@shinshu-u.ac.jp)

第 33 回代数的組合せ論シンポジウム, 滋賀県大津市, 2016 年 6 月

1 はじめに

有限群論およびその表現論において、指標理論は重要な役割をもつ。指標に関する情報は指標表にまとめられ、第一、第二の二つの直交関係が成り立つことが知られている。可換なアソシエーション・スキームについても同様に指標表 (第一固有行列) が重要な役割をもち、二つの直交関係が成り立つ。しかし可換とは仮定しないアソシエーション・スキームでは状況が異なる。この場合にも指標表は自然に定義されるが、それは正方行列ではなく、直交関係も成り立つが一つだけである。有限群の指標表が正方行列であるのは、群の元すべてを考えるのではなく、共役類の代表をとるからである。アソシエーション・スキームには共役類に相当するよい概念が定義されておらず、したがって群の場合でいえば群の元すべてを並べていることになり、そのために指標表は正方行列とはならない (特殊な場合には共役類に相当する概念が定義されていて、第二直交関係も成り立つことが知られている [6])。そこで指標よりも多くの情報をもったものを考える。既約表現の成分を抜き出すことを考える。既約表現の同値類の代表を固定し、その $(1,1)$-成分、$(1,2)$-成分、といった具合に考えるのである (ただしこれは表現の同値類の代表のとり方に依存し一意的ではないことに注意しておく)。このようにして作った行列は正方行列であり、二つの直交関係が成り立つ。この直交関係が Schur 関係式 (Schur relation) であり、Higman [8] に見られるが、本質的には Frame [3] ですでに得られている。シュアー関係式はこれまであまり有効に利用されていないように思われるが、ここではこれを用いて一つの結果が得られたのでそれを紹介したい。

アソシエーション・スキーム (X,S) の正標数 p の体 F 上での隣接代数 FS は、その Frame 数 $\mathcal{F}(S)$ が p で割り切れないとき、またそのときに限り半単純になることが [5] で示されている。これは有限群についての Maschke の定理 [9, III. Theorem 1.22] の類似であるが、ここで用いられる Frame 数は不必要に大きな値に感じられる。Frame 数は何らかの意味でより小さな値に分解されるのではないか、と思っていたのであるが、今回、Schur 関係式と関連する方法を用いて、Frame 数が p-ブロック毎に分解され、その値がそのブロックの半単純性を判定することが分かった。

2 アソシエーション・スキームとその表現

まずはアソシエーション・スキームを定義する。X を有限集合とする。$X \times X$ の分割

$$X \times X = \bigcup_{s \in S} s$$

を考える。このとき (X, S) が**アソシエーション・スキーム**であるとは

(1) $1 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ とおくと $1 \in S$ である。

(2) $s \in S$ に対して $s^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in s\}$ とおくと $s^* \in S$ である。

(3) $s, t, u \in S$ に対して非負整数 p_{st}^u が存在して、$(x, y) \in u$ であれば $\sharp\{z \in \mid (x, z) \in s,\ (z, y) \in t\} = p_{st}^u$ である。

が成り立つことである。任意の $s \in S$ に対して $s^* = s$ であるとき**対称**である、任意の $s, t, u \in S$ に対して $p_{st}^u = p_{ts}^u$ であるとき**可換**であるという。[1, 4] などでは対称なもののみをアソシエーション・スキームといい、[2] では定義はここでのものと同じであるが、ほとんどすべてで可換性を仮定している。可換性を仮定しない文献は多くはなく、[10, 11] などしかない。ここでは可換とは限らない一般のアソシエーション・スキームを考える。これによって、後で見るようにアソシエーション・スキームの概念は有限群をすべて含むものとなる。

$s \subset X \times X$ に対して、その**隣接行列** σ_s を次のように定める。σ_s は、行、列、共に集合 X で添字付けられた行列で、その (x, y) 成分は $(x, y) \in s$ のとき 1 で、その以外のときは 0 と定めたものである。このように、行、列、共に集合 X で添字付けられた、可換環 R 上の全行列環を $M_X(R)$ のように表す。アソシエーション・スキームの定義は

(1) σ_1 が単位行列となるような $1 \in S$ が存在する。

(2) $s \in S$ に対して σ_{s^*} が σ_s の転置行列となるような $s^* \in S$ が存在する。

(3) $s, t, u \in S$ に対して非負整数 p_{st}^u が存在して $\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} p_{st}^u \sigma_u$ である。

と言い換えることができる。特に (3) の条件から $\mathbb{Z}S = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s$ は $M_X(\mathbb{Z})$ の部分環をなす。任意の単位元をもつ可換環 R に対して

$$RS = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S$$

は $M_X(R)$ の部分 R-代数となる。これを (X, S) の R 上の**隣接代数**という。(X, S) の R 上の**表現**とは RS の行列表現、すなわち代数準同型 $RS \to M_n(R)$ を意味するものとする。また表現の**指標**とは、表現のトレース (対角成分の和) を意味するものとする。

例 2.1 (自明な表現と自明な指標)**.** $s \in S$ に対して $n_s = p_{ss^*}^1$ をその **valency** という。隣接行列 σ_s は各行、各列にちょうど n_s 個の 1 をもつ。$\sigma_s \mapsto n_s 1_R$ は RS の表現となる。これを (R 上の) **自明な表現**という。自明な表現の次数は 1 なので、これはそのまま指標となる。これを **自明な指標**という。

例 2.2 (標準表現と標準指標)**.** 隣接代数 RS は $M_X(R)$ の部分代数として定義されているから、$M_X(R)$ への埋め込みは表現となる。これを (R 上の) **標準表現**という。その指標を**標準指標**という。複素数体 $\mathbb{C}$ 上の標準指標を γ で表す。アソシエーション・スキームの定義から $\gamma(\sigma_1) = |X|$, $\gamma(\sigma_s) = 0$ $(1 \neq s \in S)$ が成り立つ。

複素数体上の隣接代数 $\mathbb{C}S$ は半単純代数であることが知られており [10, Theorem 4.1.3]、この場合には有限群の場合と同じように指標理論が有効に働く。(X, S) の体 K 上の既約指標 (既約表現の指標) 全体の集合を $\mathrm{Irr}(KS)$ と表す。特に $K = \mathbb{C}$ のときは、単に $\mathrm{Irr}(S)$ と表す。標準指標 γ を既約指標の和で表し $\gamma = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi \chi$ とするとき、この係数 m_χ を $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ の**重複度**という。

例 2.3. G を有限群とする。Ψ を G の正則右置換表現とする。このとき $\{\Psi(g) \mid g \in G\}$ を隣接行列としてアソシエーション・スキームが定義される。その隣接代数は群代数と一致し、したがって表現などもそのまま対応する。Ψ はそのまま標準表現となり、したがってこの場合は標準表現と正則表現が一致する。したがって指標の重複度については $m_\chi = \chi(1)$ が成り立っている。

この意味で、アソシエーション・スキームは有限群を含む概念であるということができる。

アソシエーション・スキーム (X, S) に対して、行が $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ で、列が $s \in S$ で添字付けられた行列 $(\chi(\sigma_s))$ をその**指標表**という。一般に $|\mathrm{Irr}(S)| \leq |S|$ であり、等号成立は (X, S) が可換のときである。したがって非可換のときは指標表は正方行列にはならない。

3 Schur 関係式と隣接代数の半単純性

可換なアソシエーション・スキームの指標表 (第一固有行列) は有限群と同じように正方行列であり、第一、第二の二つの直交関係が成り立つことが知られている。可換でない場合には指標表が正方行列でないため、二つの直交関係が成り立つことは不可能であり、一つの直交関係のみが成り立つ。これをやや強引に正方行列とし、それに対して成り立つ直交関係を **Schur 関係式**という。

$\mathrm{Irr}(S) = \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ とし、各 i に対してそれを与える既約表現 $\Phi^{(i)}$ を固定して考える。$\Phi^{(i)}_{jk} : \mathbb{C}S \to \mathbb{C}$ を σ_s に対して $\Phi^{(i)}(\sigma_s)$ の (j, k) 成分を対応させるものとする。$|S| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$ が成り立つので、このような $\Phi^{(i)}_{jk}$ はちょうど $|S|$ 個ある。これを並べて、行列 $T = (\Phi^{(i)}_{jk}(\sigma_s))$ を作れば、これは正方行列である。ここで T の行は $\{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j, k \leq \chi_i(1)\}$ で、列は S で添字付けられている。T の行に関する直交関係が Schur 関係式である。簡単のため、重複度 m_{χ_i} を m_i と表す。

定理 3.1 (Schur 関係式, Frame 1941 [3], Higman 1974 [8])**.**

$$\frac{m_i}{|X|} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \Phi^{(i)}_{jk}(\sigma_s) \Phi^{(i')}_{j'k'}(\sigma_{s^*}) = \delta_{ii'} \delta_{jk'} \delta_{j'k}.$$

定理 3.2 (Schur 関係式 (matrix form)).

$$|X|^{-1}TN^{-1}P^tTQM = E$$

ここで $T = (\Phi^{(i)}_{jk}(\sigma_s))_{(i,j,k),s}$、$N = \mathrm{diag}(n_s)$ (n_s : valency)、$M = \mathrm{diag}(m_i)$ (m_i : 重複度)、P は $s \mapsto s^*$ で定まる置換行列、Q は $(i,j,k) \mapsto (i,k,j)$ で定まる置換行列、である。

定理 3.2 の式を変形して行列 T に関するもう一つの直交関係が得られるが、それはここでは用いないので省略する。

定理 3.2 の式の両辺の行列式を取れば

$$(\det T)^2 = \varepsilon |X|^{|S|}(\det N)(\det M)^{-1} = \varepsilon |X|^{|S|}\frac{\prod_{s\in S} n_s}{\prod_{\chi\in \mathrm{Irr}(S)} m_\chi{}^{\chi(1)^2}}$$

である。ただしここで $\varepsilon = (\det P)(\det Q) \in \{-1, 1\}$ である。$\mathcal{F}(S) = |(\det T)^2|$ とおいて、これを (X,S) の **Frame 数**という。Frame 数は有理整数であることが知られている。

p を素数とする。(K,R,F) を (X,S) の分解 p-モジュラー系とする。すなわち

- R は極大イデアル πR をもつ完備離散付値環、
- R の商体 K の標数は 0、
- R の剰余体 $F = R/\pi R$ は標数 p の体、
- 隣接代数 KS, FS は分解型代数、

となるものである。(詳しくは [9] などを参照してほしい。) 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の表現と K 上の表現は適当な同一視によって対応するので、$\mathrm{Irr}(S)$ を $\mathrm{Irr}(KS)$ と考えても問題はない。このとき既約表現 $\Phi^{(i)}$ は K 上の表現であるが、その R-形式を取ることによって $\Phi^{(i)}(\sigma_s) \in M_{\chi_i(1)}(R)$ と仮定することができる [9, II.1.2]。すなわち、行列 $T = (\Phi^{(i)}_{jk}(\sigma_s))$ のすべての成分は R の元であると仮定することができる。また、このとき、自然な射影 $R \to F = R/\pi R$ の像を考えて、R 上の表現 $\Phi^{(i)}$ から F 上の表現 $\Phi^{(i)*}$ が定まる。

この設定の下で

$$\begin{aligned} FS \text{ は半単純} &\iff \text{すべての } \Phi^{(i)^*} \text{ は全射} \\ &\iff T^* \text{ は正則} \\ &\iff p \nmid \mathcal{F}(S) \end{aligned}$$

を示すことができ、次の結果を得る。

定理 3.3 (Hanaki 2000 [5]). F を標数 $p > 0$ の体とする。アソシエーション・スキーム (X,S) の F 上の隣接代数 FS が半単純であるための必要十分条件は $p \nmid \mathcal{F}(S)$ となることである。

[5] における証明は本質的にはこれと大きくは違わないが、行列 T を通すことによって、その見通しが良くなり、次節のような考察が可能になったと思われる。

例 3.4. 3 次対称群 S_3 から例 2.3 のようにして得られるアソシエーション・スキームを考える。すべての valency は 1 で、既約指標の次数と重複度は一致し $1, 1, 2$ であるから、その Frame 数は

$$\mathcal{F}(S_3) = 6^6 \times \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2^4} = 2^2 \times 3^6 = 2916$$

となる。したがって FS_3 が半単純になるためには $p \neq 2, 3$ が必要十分条件であるという、Maschke の定理による結果と一致する。

この例で見るように、Frame 数は隣接代数の半単純性を判定し、Maschke の定理における有限群の位数の類似であると考えることができる。しかし有限群を例に考えたとき、Frame 数は大きすぎるように感じられる。これは次のように説明することができる。

有限群の群代数では、群代数が半単純になることと、その主ブロックが半単純になることは同値である。一方で、アソシエーション・スキームについては主ブロックが半単純であって隣接代数が半単純ではないものが存在する。また、アソシエーション・スキームにおいては

$$\text{主ブロックが半単純} \iff p \text{ が } |X| \text{ を割らない}$$

が成り立つ。したがって、これが Maschke の定理の一般化であり、定理 3.3 は別のものであると思う方が自然かもしれない。

どのように解釈したとしても Frame 数は大きいように感じられるので、それを分解することを考える。次節で Frame 数のブロックへの分解を考える。

4 Frame 数のブロックへの分解

まずはブロックに関する基本的なことを説明する。(K, R, F) は前節と同じようにアソシエーション・スキーム (X, S) の分解 p-モジュラー系とする。RS の両側イデアルとしての直既約直和分解を

$$RS = B_0 \oplus \cdots \oplus B_\ell$$

とし、B_i を (X, S) の**ブロック**という。標数 p を明示したいときには p-ブロックともいう。ブロック全体の集合を $\mathrm{Bl}(S)$ または $\mathrm{Bl}_p(S)$ と表す。直和分解に対応する 1_{RS} の分解を $1_{RS} = e_{B_0} + \cdots + e_{B_\ell}$ とし、e_{B_i} をブロック B_i の**ブロックべき等元**という。ブロックべき等元は RS の中心的原始べき等元である。このとき $e_{B_i}{}^* \in FS$ も FS の中心的原始べき等元となり、$FB_i = e_{B_i}{}^* FS$ とおけば、両側イデアルとしての直既約直和分解

$$FS = FB_0 \oplus \cdots \oplus FB_\ell$$

が得られる。KS においても同様に $KB_i = e_{B_i} KS$ とおいて、両側イデアルとしての直和分解 $KS = KB_0 \oplus \cdots \oplus KB_\ell$ が得られるが、これは直既約直和分解ではない。

$\mathrm{Irr}(S)$ もブロックに分解される。$\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対して $\chi(e_{B_i}) \neq 0$ なる $e_i \in \mathrm{Bl}(S)$ がただ一つ存在する。$\mathrm{Irr}(KB_i) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(S) \mid \chi(e_{B_i}) \neq 0\}$ とおけば、$\mathrm{Irr}(S)$ の分割

$$\mathrm{Irr}(S) = \mathrm{Irr}(KB_0) \cup \cdots \cup \mathrm{Irr}(KB_\ell)$$

が得られる。また $e_{B_i} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B_i)} e_\chi$ が成り立つ。ここで $e_\chi = \frac{m_\chi}{|X|} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_{s^*})\sigma_s$ は $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$ に対応する KS の中心的原始べき等元である。$\mathrm{Irr}(S)$ の空でない部分集合 I で $\sum_{\chi \in I} e_\chi \in RS$ となるもののうち、極小なものが $\mathrm{Irr}(KB_i)$ であり、この事実を用いることによって指標のブロック分解は、その指標表から求めることができるが、実際に計算することはそれほど容易ではない。また、指標のブロック分解は p-モジュラー系の取り方にも依存することに注意しておく。

自明な指標 (例 2.1) が属するブロックを**主ブロック**といい。通常は B_0 を主ブロックとする。

Frame 数のブロックへの分解を考える。行列 $T = (\Phi_{jk}^{(i)})$ の行をブロックごとに並べ

$$T = \begin{pmatrix} T'_{B_0} \\ \vdots \\ T'_{B_\ell} \end{pmatrix}$$

のように表すことにする。T の R-単因子に注目すると次が成り立つ。

命題 4.1. T の単因子の集合は (重複度も含めて) T'_{B_i} $(i = 0, 1, \ldots, \ell)$ の単因子の集合の和集合に等しい。

T の単因子の積は (R の単数の積を除いて) $\det T$ であるから、その 2 乗が Frame 数に等しい。ただし R の単数を除いて考えるので、p-べき (π-べき) 部分のみを考えることになる。ブロックに対しても、隣接代数自身の場合と同じように次の命題が成り立つ。

命題 4.2. $B \in \mathrm{Bl}(S)$ に対して FB が (半) 単純であることと T'_B のすべての単因子が 1 であることは同値である。

これで Frame 数はブロックに分割されたことになるが、更なる改良を行う。ここまでで行列 $T = (\Phi_{jk}^{(i)})$ を行で分割したが、列でも分割することを考える。これには既存の結果 [9, III. Lemma 11.1] をそのまま用いることができ、次の命題が成り立つ。

命題 4.3. S の分割 $S = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(S)} S_B$ が存在して、$S' = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(S)} \{e_B \sigma_s \mid s \in S_B\}$ は RS の R-基となる。

行列 T を定義するときには RS の R-基として $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ を考えていたが、この命題の S' をとれば

$$\begin{pmatrix} T_{B_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{B_\ell} \end{pmatrix}$$

となり、T はこの行列と R-同値である。次の定理を得る。

定理 4.4. (1) $\mathcal{F}(S) = \varepsilon \prod_{B \in \mathrm{Bl}(S)} (\det T_B)^2$ である。ただし ε は R の単数である。

(2) $B \in \mathrm{Bl}(S)$ に対して、FB が半単純であることと $\det T_B$ が R の単数であることは同値である。

例 4.5. [7] の as15[16] を $p = 2$ として考える。S と $\mathrm{Irr}(S)$ のブロック分解は

$$S_{B_0} = \{\sigma_0\}, \quad S_{B_1} = \{\sigma_3\}, \quad S_{B_2} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5\}$$

$$\mathrm{Irr}(KB_0) = \{\chi_1\}, \quad \mathrm{Irr}(KB_1) = \{\chi_2\}, \quad \mathrm{Irr}(KB_2) = \{\chi_3\}$$

である。行列 T とそれをブロックに分けたものは、それぞれ

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
$\Phi_{11}^{(1)}$	1	1	1	4	4	4
$\Phi_{11}^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\Phi_{11}^{(3)}$	1	0	-1	2	0	-2
$\Phi_{12}^{(3)}$	0	1	-1	0	2	-2
$\Phi_{21}^{(3)}$	0	-1	1	-2	2	0
$\Phi_{22}^{(3)}$	1	-1	0	-2	0	2

	σ_0	σ_3	σ_1	σ_2	σ_4	σ_5
$\Phi_{11}^{(1)}$	1					
$\Phi_{11}^{(2)}$		-1				
$\Phi_{11}^{(3)}$			0	-1	0	-2
$\Phi_{12}^{(3)}$			1	-1	2	-2
$\Phi_{21}^{(3)}$			-1	1	2	0
$\Phi_{22}^{(3)}$			-1	0	0	2

である。(ブロックに分けたものでは $e_{B_i}\sigma_j$ を σ_j と略記している。) $T_{B_0}, T_{B_1}, T_{B_2}$ の単因子は、それぞれ $\{1\}, \{1\}, \{1, 1, 2, 2\}$ であり、したがって FB_2 だけが (半) 単純ではない。

5 注意とこれからの問題

前節で Frame 数をブロックに分け、それによってブロック毎に半単純性を判定することができるということを見た。行列 T は既約表現の R-形式によって定まり、一般に K-同値ではあるが R-同値とは限らない。講演では、そのために Frame 数をブロックに分けるときの一意性が分からないと言ったが、後で考えてみると、T_B の行列式は (R の単数を除いて) きちんと定まる。T_B の行列式がブロックに対して定まるので、これを用いて有限群のブロックの不足数 (defect) の類似も考えてみたいと思っている。T_B の単因子については、やはり一意性は分からない。今後の課題である。

References

[1] R. A. Bailey, *Association schemes*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 84, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[3] J. S. Frame, *The double cosets of a finite group*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 458–467.

[4] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman and Hall Mathematics Series, Chapman & Hall, New York, 1993.

[5] A. Hanaki, *Semisimplicity of adjacency algebras of association schemes*, J. Algebra **225** (2000), no. 1, 124–129.

[6] ______, *Nilpotent schemes and group-like schemes*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), no. 2, 226–236.

[7] A. Hanaki and I. Miyamoto, *Classification of association schemes with small vertices*, published on web (http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as/).

[8] D. G. Higman, *Schur relations for weighted adjacency algebras*, Symposia Mathematica, Vol. XIII (Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972), Academic Press, London, 1974, pp. 467–477.

[9] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[10] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[11] ______, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.