ユークリッド空間および球面上における isosceles set について

城戸　浩章 (Hiroaki Kido)

九州工業大学　学習教育センター
kido.hiroaki997@mail.kyutech.jp

1 Introduction

$\mathbb{R}^k$ を k 次元ユークリッド空間とし、S^k を k 次元球面とする。
$x, y \in \mathbb{R}^k$ を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k), y = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ とするとき、x と y の距離を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$ で定める。

Definition 1.1. 有限集合 $X \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$A(X) = \{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

とおく。このとき、$|A(X)| = s$ であるならば、X を $\mathbb{R}^k$ における s-distance set と呼ぶ。
　また、2 つの s-distance set が互いに相似である場合は同型であるということにする。

s-distance set に関する主な問題として、次の 2 つが挙げられる。

1. $\mathbb{R}^k$ における s-distance set の個数が同型を除いて有限になるときの点の数はいくつになるのか?

2. $\mathbb{R}^k$ における s-distance set の点の個数の最大値はいくつになるのか?

2-distance set の問題 1 については、$|X| \geq k+2$ であるならば、$\mathbb{R}^k$ における 2-distance set となる X は有限個であることが Einhorn-Schoenberg [5] により示された。
　また、2-distance set の問題 2 については、$\mathbb{R}^1$、$\mathbb{R}^2$ (Kelly [9])、$\mathbb{R}^3$ (Croft [4]) の場合に知られている。$\mathbb{R}^3$ における最大値を与える 2-distance set の分類は Einhorn-Schoenberg [6] により示され、さらに、$k \leq 8$ に対する $\mathbb{R}^k$ の場合は Lisoněk [14] によって与えられ、次のページの Table 1 のような結果が得られている。(坂内-坂内 [1] より抜粋)
　$\mathbb{R}^k$ を S^k に置き換えた 2-distance set の問題 2 については、Musin [15] が $k \leq 38$ に対して述べている。2-distance set について関連する他の問題は、Larman-Logers-Seidel [13] 等を参考にされたい。また、$\mathbb{R}^k$ における一般の s-distance set については、Bannai-Bannai-Stanton [2] や Blokhuis [3] によって $|X| \leq \binom{k+s}{s}$ という上限が与えられた。$\mathbb{R}^2$ における 3-distance set については Shinohara [16] が結果を得ている。しかし、これらの結果を除いては s-distance set についての結果はあまり得られていない。

　また、2-distance set を考える際の 1 つのアイデアとして、isosceles set というものがあり、次で定義される。

Table 1: 2-distance set の点の個数の最大値

k	$\binom{k+2}{2}$	2-distance set の点の個数の最大値	最大値を与える 2-distance set の個数
1	3	3	1
2	6	5	1
3	10	6	6
4	15	10	1
5	21	16	1
6	28	27	1
7	36	29	1
8	45	45	≥ 1

Definition 1.2. $\mathbb{R}^k$ において、n 個の点からなる集合を考える。
この集合の任意の 3 点が 2 等辺 3 角形をなしているとき (ここでは、同一直線上の 3 点も 2 等辺 3 角形とみなす)、この集合は n-point isosceles set であるという。

任意の 2-distance set は isosceles set になっていることから、isosceles set は研究されるようになった。

isosceles set についても、s-distance set を定義した後に挙げた 2 つの問題を isosceles set に置き換えた次の問題が研究の対象となっている。

1. $\mathbb{R}^k$ における isosceles set の個数が同型を除いて有限になるときの点の数はいくつになるのか?
2. $\mathbb{R}^k$ における isosceles set の点の個数の最大値はいくつになるのか?

上記の 2 つの問題や関連する問題について、isosceles set については次のことが知られている。

- $\mathbb{R}^1$ では isosceles set の点の個数の最大値は 3 である。
- $\mathbb{R}^2$ における 7-point isosceles set は存在しない。(Golomb [8], Kelly [9])
- $\mathbb{R}^2$ における 6-point isosceles set は、同型を除けば正 5 角形とその中心の 6 点からなる集合の唯 1 つに定まる。(Golomb [8], Kelly [9])
- $\mathbb{R}^2$ における 5-point isosceles set は、同型を除けば Fig. 1 の 3 つの集合に限る。(Fishburn [7], Golomb [8])
- $\mathbb{R}^3$ における 9-point isosceles set は存在しない。(Croft [4])
- $\mathbb{R}^3$ における 8-point isosceles set は、同型を除いて Fig. 2 で表される集合の唯 1 つに定まる。(Kido [10])

- $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。
- $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set で 3-distance set のものは同型を除くと 15 個に定まる。(Kido [11])
- $\mathbb{R}^4$ における 12-point isosceles set は存在しない。(Kido [12])
- $\mathbb{R}^4$ における 11-point isosceles set は、同型を除けば 2 つに定まる。(Kido [12])

Fig. 1: $\mathbb{R}^2$ における全 3 個の 5-point isosceles set

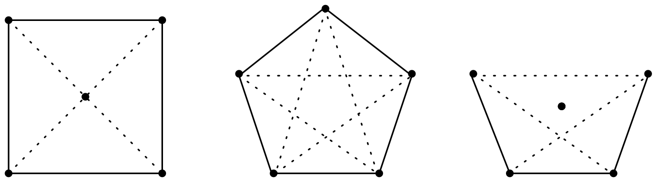
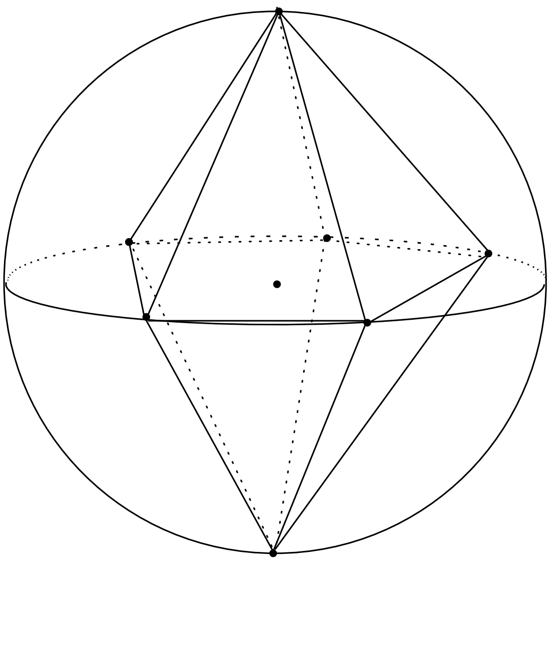


Fig. 2: $\mathbb{R}^3$ における唯 1 つの 8-point isosceles set



今回は、$\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set と S^2 における 6-point isosceles set の分類について考えた。いずれも無限系列の存在があり、同型を除いても有限個ではないが、無限系列まで含めた完全分類を与えることも必要であると考えて研究に至った。

次の 2 つの定理が本講演における主結果である。

Theorem 1.1. $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。しかし、正 5 角形に 2 つの点を加えた 3 種類の無限系列 (Fig. 3 を参照) を除くと、$\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set は Fig. 4 における $X_1, \cdots, X_5$ のいずれかと同型になる。

Theorem 1.2. S^2 における 6-point isosceles set は同型を除いても無限に存在する。しかし、無限系列である正 5 角錐を除くと、S^2 における 6-point isosceles set は Fig. 5 における $Y_1, \cdots, Y_5$ のいずれかと同型になる。

Croft の手法 [4] を利用して 2 つの定理の証明を行った。証明の概略を次の節以降で述べる。

Fig. 3: $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set の 3 種類の無限系列

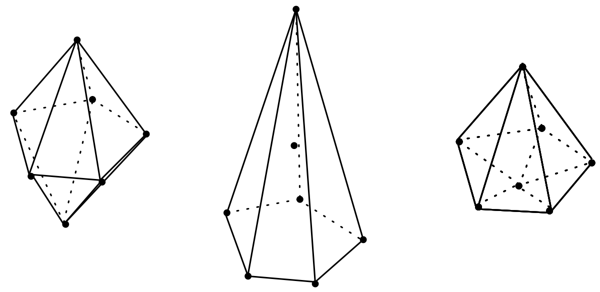


Fig. 4: 3 種類の無限系列を除く、$\mathbb{R}^3$ におけるすべての 7-point isosceles set

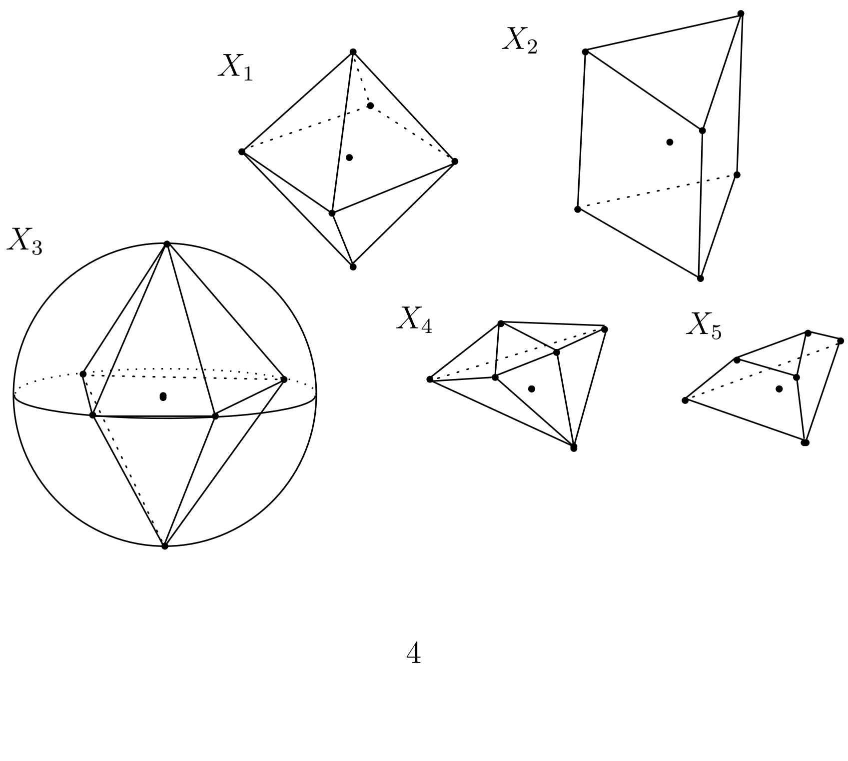
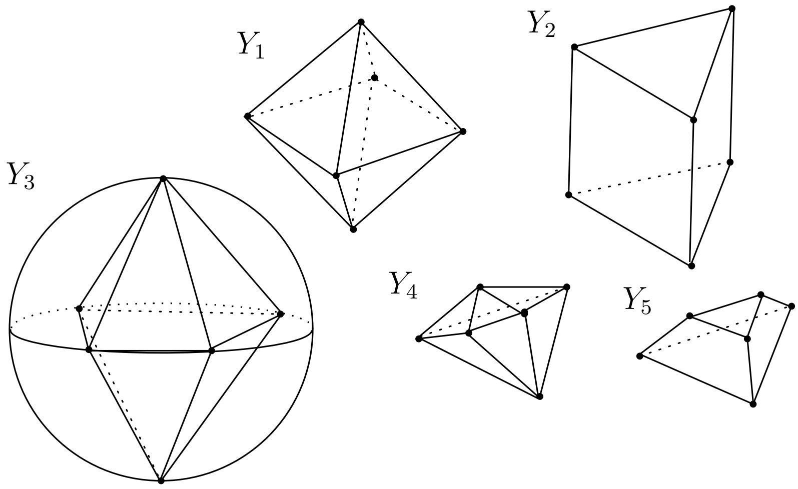


Fig. 5: 無限系列となる正5角錐を除く、S^2 におけるすべての 6-point isosceles set



2 Notation and a fundamental lemma

次の言葉を導入する。
apex : 3点以上からなる集合において、残りすべての点から等距離の位置にある点

$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ を n-point isosceles set とする。$\mathcal{P}$ の点 P_i の"vertex-number" $V(P_i)$ を $V(P_i) = (P_i$ を含む3点からなる部分集合をすべて考え、そのうち、P_i が apex となっているものの数 $) = (\angle P_i$ を頂角とする2等辺3角形の個数$)$
で定義する。

このとき、

$$V(P_1) + \cdots + V(P_n) \geq \binom{n}{3} \tag{1}$$

が成り立つ。

また、点 P_i から $\mathcal{P}$ の残りの点との距離を考える。距離 a となる点が r 個、距離 b となる点が s 個、$\cdots$、距離 l となる点が u 個あったとき ($a, b, \cdots, l$ は互いに異なり、$r \geq s \geq \cdots \geq u$ とする。また、$r + s + \cdots + u = n - 1$)、点 P_i は type$(r, s, \cdots, u)$ の点であるということにする。

P_i が type$(r, s, \cdots, u)$ であるならば、

$$V(P_i) = \binom{r}{2} + \binom{s}{2} + \cdots + \binom{u}{2} \tag{2}$$

が成り立つ。

isosceles set の分類を考えるうえで、最も基本的な補題を述べる。

Lemma 2.1. $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_7\}$ を $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set とし、P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき P_1 の type は、次の5つのいずれかである。

$$(3, 3), (4, 2), (4, 1, 1), (5, 1), (6).$$

Proof: $V(P_1)+\cdots+V(P_7)\geq\binom{7}{3}=35$ が (1) より成り立つので、 $V(P_1)\geq 5$ となる。

ゆえに、P_1 の type を $(r,s,\cdots,u)$ とすると、(2) より、

$$\binom{r}{2}+\binom{s}{2}+\cdots+\binom{u}{2}\geq 5 \tag{3}$$

が成り立ち、さらに、

$$r+s+\cdots+u=6 \tag{4}$$

も成り立つ。

(3) と (4) の両方を満たすには、$(r,s,\cdots,u)$ は補題にある 5 つのうちのいずれかでなければならない。 □

同様にして次の系も示せる。

Corollary 2.2. $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_6\}$ を S^2 における 6-point isosceles set とし、P_1 が最大の vertex-number であるとする。このとき P_1 の type は、$(3,2),(4,1),(5)$ のいずれかである。 □

3 Sketch of the proof of Theorems 1.1 and 1.2

ポイントとなる補題や命題を以下に紹介することによって（ただし、それらの証明は省略する)、Theorem 1.1 と 1.2 の証明の概略を述べる。

Lemma 2.1 と Corollary 2.2 における P_1 の type を場合分けして考察することによって、次の 2 つの補題が示される。

Lemma 3.1. $\mathbb{R}^3$ における 7-point isosceles set が存在するならば、7 点のうちのある 4 点は同一円周上にある。 □

Lemma 3.2. S^2 における 6-point isosceles set が存在するならば、6 点のうちのある 4 点は同一円周上にある。 □

ある 4 点は同一円周上にあることが分かったので、同一円周上の 4 点の配置を考える。次の補題はそれについてのもので、Croft [4] の Lemma 18 と同様に証明できる。

Lemma 3.3. 4-point isosceles set をなす同一円周上の 4 点は、正方形の 4 点もしくは正 5 角形の 4 点に限る。 □

Lemma 3.3 より、正方形の 4 点を含む isosceles set と正 5 角形の 4 点を含む isosceles set の分類をそれぞれ考えればよい。

《正方形を含む isosceles set について》

Proposition 3.4. $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ を $\mathbb{R}^3$ における正方形を含む n-point isosceles set とし、P_1,P_2,P_3,P_4 は正方形であるとする。このとき、$P_1=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),P_2=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$, $P_3=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),P_4=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ と仮定できる。

すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。
(i) $(0,0,0)$ を通り、正方形 $P_1P_2P_3P_4$ に垂直な直線 L 上の点,
(ii) 次の Q_1 から Q_8 までのいずれか.
$Q_1=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_2=(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_3=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_4=(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,
$Q_5=(0,-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_6=(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_7=(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $Q_8=(-\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
（正方形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ と $Q_5Q_6Q_7Q_8$ はともに 1 辺の長さが $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。） □

Lemma 3.5. $\mathbb{R}^3$ において、正方形の 4 点を含む 7-point isosceles set は同型を除くと Fig. 4 の X_1 および X_2 に限られる。

Sketch of the proof: Proposition 3.4 より、残りの 3 点は次のいずれかを満たしている。（なお、Q_1 から Q_8 までの点を取る場合、対称性から最初の 1 点として Q_1 をとることができる。）

(i) 3 点とも L 上にある。
(ii) 1 点は Q_1 で、残りの 2 点は L 上にある。
(iii) 2 点は Q_1, Q_i $(i\in\{2,\cdots,8\})$ で、残りの 1 点は L 上にある。

それぞれの場合を考察すると、
(i) の場合：Fig. 4 における X_1 が得られる。
(ii) の場合：これを満たすものは存在しない。
(iii) の場合：Q_i として Q_3 をとれば Fig. 4 における X_2 が得られる。 □

Lemma 3.6. S^2 において、正方形の 4 点を含む 6-point isosceles set は同型を除くと Fig. 5 の Y_1 および Y_2 に限られる。

Sketch of the proof: Proposition 3.4 より、残りの 2 点は次のいずれかを満たしている。（Lemma 3.5 と同様に、Q_1 から Q_8 までの点を取る場合、対称性から最初の 1 点として Q_1 をとることができる。）

(i) 2 点とも L 上にある。
(ii) 1 点は Q_1 で、もう 1 点は L 上にある。
(iii) Q_1 と Q_i $(i\in\{2,\cdots,8\})$。

すべての点が球面上にあるという条件を含めてそれぞれの場合を考察すると、
(i) の場合：Fig. 5 における Y_1 が得られる。
(ii) の場合：これを満たすものは存在しない。
(iii) の場合：Q_i として Q_3 をとれば Fig. 5 における Y_2 が得られる。 □

《正 5 角形の 4 点を含む isosceles set について》

Proposition 3.7. $\mathcal{P}=\{P_1,\cdots,P_n\}$ を $\mathbb{R}^3$ における正 5 角形の 4 点を含む n-point isosceles set とし、P_1,P_2,P_3,P_4 は正 5 角形の 4 点であるとする（P_4 と P_1 の間には"gap"がある）。このとき、$P_1=(\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},0)$, $P_2=(-\frac{1}{2},0,0)$, $P_3=(\frac{1}{2},0,0)$, $P_4=(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},0)$ と仮定できる。
（P_2P_3 の中点が原点で、正 5 角形の 1 辺の長さは 1 である。）
すると、残りの点の座標は次のいずれかを満たしていなければならない。
(i) $(0,\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}},0)$ を通り、正 5 角形 $P_1P_2P_3P_4$ に垂直な直線 L 上の点,

(ii) 正 5 角形の残りの点 $T\,(0, \frac{5+3\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, 0)$,

(iii) $Q_1 = (0, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}})$, $Q_2 = (0, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}})$. □

Proposition 3.8. $\mathbb{R}^3$ における正 5 角形の 4 点を含む n-point isosceles set について、Proposition 3.7 での T と Q_i $(i \in \{1, 2\})$ を同時に選ぶことはできない。 □

Lemma 3.9. $\mathbb{R}^3$ における正 5 角形の 4 点を含む 7-point isosceles set は、Fig. 3 における 3 種類の無限系列と、Fig. 4 における X_3, X_4, X_5 のいずれかと同型になる。

Sketch of the proof: Proposition 3.7, 3.8 より、残りの 3 点は次のいずれかを満たしている。（なお、Q_1 あるいは Q_2 を取る場合、対称性から最初の 1 点として Q_1 をとることができる。）

(i) 3 点とも L 上にある。
(ii) 1 点は T で、残りの 2 点は L 上にある。
(iii) 1 点は Q_1 で、残りの 2 点は L 上にある。
(iv) 2 点は Q_1, Q_2 で、残りの 1 点は L 上にある。

それぞれの場合を考察すると、
(i) の場合：Fig. 4 における X_3 が得られる。
(ii) の場合：Fig. 3 における 3 種類の無限系列が得られる。
(iii) の場合：Fig. 4 における X_4 および X_5 が得られる。
(iv) の場合：これを満たすものは存在しない。 □

Lemma 3.10. S^2 における正 5 角形の 4 点を含む 6-point isosceles set は、無限系列である正 5 角錐と、Fig. 5 における Y_3, Y_4, Y_5 のいずれかと同型になる。

Sketch of the proof: Proposition 3.7, 3.8 より、残りの 2 点は次のいずれかを満たしている。（Lemma 3.9 と同様に、Q_1 あるいは Q_2 を取る場合、対称性から最初の 1 点として Q_1 をとることができる。）

(i) 2 点とも L 上にある。
(ii) 1 点は T で、もう 1 点は L 上にある。
(iii) 1 点は Q_1 で、もう 1 点は L 上にある。
(iv) Q_1 と Q_2。

すべての点が球面上にあるという条件を含めてそれぞれの場合を考察すると、
(i) の場合：Fig. 5 における Y_3 が得られる。
(ii) の場合：無限系列である正 5 角錐が得られる。
(iii) の場合：Fig. 5 における Y_4 および Y_5 が得られる。
(iv) の場合：同一球面上にないので、これを満たすものは存在しない。 □

以上の結果をまとめると、Theorem 1.1 および 1.2 を得る。 □

References

[1] 坂内英一、坂内悦子、球面上の代数的組合せ理論、シュプリンガー・フェアラーク東京、1999.

[2] E. Bannai, E. Bannai, and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space, II, *Combinatorica* **3** (1983), 147-152.

[3] A. Blockhuis, Few-distance sets, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[4] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400-424, Corrigendum. ibid. **13** (1963), 384.

[5] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points I, *Indag. Math.* **28** (1966), 479-488. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[6] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On Euclidean sets having only two distances between points II, *Indag. Math.* **28** (1966), 489-504. (Nederl Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.69)

[7] P. Fishburn, Isosceles Planar Subsets, *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), 391-398.

[8] M. Golomb, Advanced Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948), 513-514.

[9] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227-229.

[10] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **27** (2006), 329-341.

[11] H. Kido, Classification of isosceles 7-point 3-distance sets in 3-dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **28** (2007), 685-704.

[12] H. Kido, On isosceles sets in the 4-dimensional Euclidean space, *International J. Combin.*, **2010** (2011), article ID 803210, 1-30.

[13] D. G. Larman, C. A. Logers, and J. J. Seidel, On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 261-267.

[14] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A. 77 (1997), 318-338.

[15] O. R. Musin, Spherical two-distance sets, *J. Comb. Theory*, Ser. A. 116 (4) (2009), 988-995.

[16] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *European J. Combin.*, **25** (2004), 1039-1058.