部分空間束の結合代数の拡張と 量子アファイン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

渡邊 悠太 (東北大学 大学院情報科学研究科) *

1 はじめに

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n-次元ベクトル空間に対して, その部分空間全体の集合 P を考える. 集合 P には包含関係により半順序構造が入り, これを**部分空間束** (*subspace lattice*) と呼ぶ. 部分空間束 P のファイバー P_i を次のように定める.

$$P_i = \{y \in P \mid \dim y = i\}, \qquad 0 \leq i \leq n.$$

各ファイバー上には Grassmann グラフと呼ばれる距離正則グラフが定義される. 本研究の目標は, ファイバー上に定義される隣接代数や Terwilliger 代数などの Grassmann グラフの組合せ構造から定まる代数を, 部分空間束のレベルで捉えることである. Terwilliger [5] では, 幾つかの半順序集合と Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ や量子環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の対応について触れている. 本研究では, この結果に関連して, 量子アファイン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ との対応をみる.

2 Grassmann グラフ

定義 1 ([1, Section 9.3])**.** 非負整数 $0 \leq d \leq n$ に対して, *Grassmann* **グラフ** $J_q(n,d)$ とは, 頂点集合を P_d とし, 異なる 2 つの頂点 $y, z \in P_d$ に対して, $\dim(y \cap z) = d-1$ を満たすときに隣接関係を定めた (無向) グラフのことである.

Grassmann グラフ $J_q(n,d)$ は直径 $\min\{d, n-d\}$ の距離正則グラフとなることが知られている. また, $J_q(n,d)$ と $J_q(n,n-d)$ は同型なグラフであるため $d \leq n/2$ を仮定することが多い. 本稿でも, 特に断りがない限り, 整数 d は $0 \leq d \leq n/2$ を満たすとする. 行と列が集合 P_d で添字付けられた複素数体 $\mathbb{C}$ 上の行列全体のなす環を

* Email: watanabe@ims.is.tohoku.ac.jp

$\mathrm{Mat}_{P_d}(\mathbb{C})$ で表す．Grassmann グラフ $J_q(n,d)$ の**隣接代数** (*adjacency algebra*) とは，隣接行列 $A_d \in \mathrm{Mat}_{P_d}(\mathbb{C})$，つまり，

$$(A_d)_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } \dim(y\cap z) = i, \\ 0 & \text{if } \dim(y\cap z) \neq i \end{cases} \qquad y,z \in P_d$$

で生成される全行列環 $\mathrm{Mat}_{P_d}(\mathbb{C})$ の部分代数である．

ある部分空間 $x \in P$ に対して，部分集合 $Y(x) \subseteq P_d$ を

$$Y(x) = \{y \in P_d \mid x \subseteq y\}$$

と定める．各 $0 \leq i \leq \dim x$ に対して，部分集合 $Y(x)$ から距離 i の頂点の集合を $Y_i(x)$ で表す．

$$Y_i(x) = \{y \in P_d \mid \dim(y\cap x) = \dim x - i\}.$$

行列 $E_i^*(Y(x)) \in \mathrm{Mat}_{P_d}(\mathbb{C})$ を $Y_i(x)$ への射影として定義する．つまり，行列 $E_i^*(Y(x))$ は対角成分に

$$E_i^*(Y(x))_{y,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in Y_i(x), \\ 0 & \text{if } y \notin Y_i(x) \end{cases} \qquad y \in P_d$$

を持つ対角行列である．

定義 2 ([4, Section 3], [3, Section 4])**.** 全行列環 $\mathrm{Mat}_{P_d}(\mathbb{C})$ の部分代数として隣接行列 A と射影行列 $E_0^*(Y(x)), E_1^*(Y(x)), \ldots, E_{\dim x}^*(Y(x))$ で生成される代数を，グラフ $J_q(n,d)$ の部分集合 $Y(x)$ による *Terwilliger* **代数**という．

3 結合代数の拡張と Terwilliger 代数

行と列が集合 P で添字付けられた複素数体 $\mathbb{C}$ 上の行列全体のなす環を $\mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ で表す．**下降行列** (*lowering matrix*) $L \in \mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ と**上昇行列** (*raising matrix*) $R \in \mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ を次のように定める．

$$L_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } y \subseteq z,\ \dim y = \dim z - 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad y,z \in P,$$

$$R_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } z \subseteq y,\ \dim z = \dim y - 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad y,z \in P.$$

定義から明らかに，L と R は互いに転置行列の関係にある．次に，固定した部分空間 $x \in P$ に対して，各ファイバーの分割

$$P_{i,j} = \{y \in P_{i+j} \mid \dim(y\cap x) = i\}$$

$(0 \leq i \leq \dim x,\ 0 \leq j \leq n - \dim x)$ を考え, **射影行列** (*projection matrix*) $E^*_{i,j} \in \mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ を $P_{i,j}$ への射影として定義する. つまり, 行列 $E^*_{i,j}$ は対角成分に

$$(E^*_{i,j})_{y,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in P_{i,j}, \\ 0 & \text{if } y \notin P_{i,j} \end{cases} \qquad\qquad y \in P$$

を持つ対角行列である.

$V = \mathbb{C}P$ を, 集合 P を基底に持つ $\mathbb{C}$ 上の列ベクトル空間とする. 全行列環 $\mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ は行列の積で自然にベクトル空間 V に (左から) 作用するので, V は**標準加群** (*standard module*) と呼ばれる. 射影行列の定義より, 各 $0 \leq i \leq \dim x$, $0 \leq j \leq n - \dim x$ に対して, $E^*_{i,j}V$ は $P_{i,j}$ を基底に持つ V の部分空間となる. さらに, 下降行列 L と上昇行列 R は V に対して次のように作用する.

$$\begin{aligned} LE^*_{i,j}V &\subseteq E^*_{i-1,j}V + E^*_{i,j-1}V, \\ RE^*_{i,j}V &\subseteq E^*_{i+1,j}V + E^*_{i,j+1}V. \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq i \leq \dim x$ と $0 \leq j \leq n - \dim x$ を満たさないときは, $E^*_{i,j}V = 0$ と約束する.

全行列環 $\mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ の部分代数として下降行列 L, 上昇行列 R と射影行列 $E^*_{i,j}$ $(0 \leq i \leq \dim x, 0 \leq j \leq n - \dim x)$ で生成される代数を, $\mathcal{H}$ で表す. ここでは詳しく述べないが, 代数 $\mathcal{H}$ は部分空間束 P の結合代数を部分代数として含んでいるため, 結合代数のある種の "拡張" と見ることができる.

各 $0 \leq i \leq n$ に対して, 包含関係 $P_i \subseteq P$ から自然に定まる制限写像 $\varphi_i : \mathrm{Mat}_P(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{P_i}(\mathbb{C})$ を考える. つまり, 行と列が P_i で添字付けられる $M \in \mathrm{Mat}_P(\mathbb{C})$ の主小行列を $\varphi_i(M)$ として定義する. 今回扱う代数 $\mathcal{H}$ は, 次の意味で, Grassmann グラフの Terwilliger 代数の一般化となっている.

命題 3. 非負整数 $\dim x \leq d \leq n/2$ に対して, 代数 $\mathcal{H}$ の P_d への制限

$$\varphi_d(\mathcal{H}) = \{\varphi_d(H) \mid H \in \mathcal{H}\}$$

は代数となる. 特に, Grassmann グラフ $J_q(n, d)$ の $Y(x)$ による Terwilliger 代数と (代数として) 同型である.

Proof. 表現を簡単にするため, 添字集合を

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_d &= \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq \dim x, 0 \leq j \leq n - \dim x, i + j = d\} \\ &= \{(i, d - i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq \dim x\} \end{aligned}$$

とおく. 簡単な考察から, φ_d は, $\mathcal{H}$ の上では代数準同型写像であり, その像 $\varphi_d(\mathcal{H})$ は, 生成元として RL, $E^*_{i,j}$ $((i, j) \in \mathbb{I}_d)$ を持つことが分かる. さらに, 写像 φ_d によって各

生成元は次のように対応する.

$$RL \mapsto A_d + \frac{q^d - 1}{q - 1} \sum_{i=0}^{d} E_i^*(Y(x)), \qquad E_{i,j}^* \mapsto E_{\dim x - i}^*(Y(x)) \quad (i, j) \in \mathbb{I}_d.$$

以上より命題が従う.

□

4 量子アファイン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

本章内に限り, $q \in \mathbb{C}$ は 1 の冪根でも 0 でもない任意のスカラーとする. ここでは, 量子アファイン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の定義のみ記述し, 参考文献として Chari–Pressley [2] を挙げる. 非負整数 n に対して,

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

と定める.

定義 4 ([2, Section 2])**.** **量子アファイン環** $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ とは, 生成元 $e_i^+, e_i^-, k_i, k_i^{-1}$ $(i = 0, 1)$ と以下の定義関係式を持つ $\mathbb{C}$ 上の結合代数である.

$$\begin{aligned}
k_i k_i^{-1} &= k_i^{-1} k_i = 1, \\
k_0 k_1 &= k_1 k_0, \\
k_i e_i^{\pm} &= q^{\pm 2} e_i^{\pm} k_i, \\
k_i e_j^{\pm} &= q^{\mp 2} e_j^{\pm} k_i, \quad i \neq j, \\
e_i^+ e_i^- - e_i^- e_i^+ &= \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\
e_0^{\pm} e_1^{\mp} - e_1^{\mp} e_0^{\pm} &= 0, \\
(e_i^{\pm})^3 e_j^{\pm} - [3]_q (e_i^{\pm})^2 e_j^{\pm} e_i^{\pm} + [3]_q e_i^{\pm} e_j^{\pm} (e_i^{\pm})^2 - e_j^{\pm} (e_i^{\pm})^3 &= 0, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

この生成元 $e_i^+, e_i^-, k_i, k_i^{-1}$ は, *Chevalley* **生成元**と呼ばれる.

5 主定理

表記を簡単にするため, $a = \dim x$, $b = n - \dim x$ とおく. また,

$$L_1 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=0}^{b} E^*_{i-1,j} L E^*_{i,j}, \qquad L_2 = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=1}^{b} E^*_{i,j-1} L E^*_{i,j},$$

$$R_1 = \sum_{i=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{b} E^*_{i+1,j} R E^*_{i,j}, \qquad R_2 = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b-1} E^*_{i,j+1} R E^*_{i,j}.$$

とする. 各 $i = 1, 2$ に対して, L_i と R_i は互いに転置の関係にある. さらに, $L = L_1 + L_2$ と $R = R_1 + R_2$ を満たす.

命題 5. 射影行列 $E^*_{i,j}$ $(0 \le i \le a, 0 \le j \le b)$ は, 可換な $\mathcal{H}$ の部分代数を生成する. さらに, その代数は次の 2 つの行列を生成元として持つ.

$$K_1 = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} q^{a/2-i} E^*_{i,j}, \qquad K_2 = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} q^{j-b/2} E^*_{i,j}.$$

Proof. 射影行列 $E^*_{i,j}$ の構成方法より明らかである. □

ここでは証明は省略するが, 組合せ論的数え上げによって, 各行列は以下の関係式を満たすことがわかる.

補題 6. 行列 L_1, L_2, R_1, R_2, K_1, K_2 の間には次の関係式が成り立つ.

(1) $K_1 L_1 = q L_1 K_1$.

(2) $K_1 L_2 = L_2 K_1$.

(3) $q K_1 R_1 = R_1 K_1$.

(4) $K_1 R_2 = R_2 K_1$.

(5) $K_2 L_1 = L_1 K_2$.

(6) $q K_2 L_2 = L_2 K_2$.

(7) $K_2 R_1 = R_1 K_2$.

(8) $K_2 R_2 = q R_2 K_2$.

(9) $L_1 R_2 = R_2 L_1$.

(10) $L_2 R_1 = R_1 L_2$.

(11) $q L_1 L_2 = L_2 L_1$.

(12) $R_1 R_2 = q R_2 R_1$.

(13) $R_1^2 L_1 - (q+1) R_1 L_1 R_1 + q L_1 R_1^2 = -q^{n/2-1}(q+1) K_1^{-1} K_2 R_1$.

(14) $q R_2^2 L_2 - (q+1) R_2 L_2 R_2 + L_2 R_2^2 = -q^{n/2}(q+1) K_1 K_2^{-1} R_2$.

(15) $q L_1^2 R_1 - (q+1) L_1 R_1 L_1 + R_1 L_1^2 = -q^{n/2}(q+1) K_1^{-1} K_2 L_1$.

(16) $L_2^2 R_2 - (q+1) L_2 R_2 L_2 + q R_2 L_2^2 = -q^{n/2-1}(q+1) K_1 K_2^{-1} L_2$.

定理 7. ある $F \in \mathcal{H}$ が存在して, 量子アファイン環 $U_{q^{1/2}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ から代数 $\mathcal{H}$ への代数準同型で以下を満たすものが存在する.

$$\begin{aligned} &e_0^+ \mapsto R_1 + R_2, && e_0^- \mapsto q^{(1-n)/2}(L_1 + L_2) \\ &e_1^+ \mapsto L_1 K_1 F + K_2 F L_2, && e_1^- \mapsto R_1 K_2^{-1} + K_1^{-1} R_2 \\ &k_0 \mapsto K_1^{-1} K_2 && k_0^{-1} \mapsto K_1 K_2^{-1} \\ &k_1 \mapsto K_1 K_2^{-1} && k_1^{-1} \mapsto K_1^{-1} K_2. \end{aligned}$$

行列 $F \in \mathcal{H}$ は補題 6 における 2 次関係式 (13)–(16) から (人工的に) 構成されるものであり, ここでは具体的な構成方法は省略する. 定理 7 は, 定義 4 における量子アファイン環 $U_{q^{1/2}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の定義関係式と, 生成元 L_1, L_2, R_1, R_2, K_1, K_2, F の満たす関係式を比較することで証明される.

定理 7 により, 標準加群 V には $U_{q^{1/2}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$-加群の構造が入る. さらに, 量子アファイン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の有限な既約加群は, Chari–Pressley [2] によって完全に分類されている. その分類結果と比較することで以下の定理を得る.

定理 8. ベクトル空間 V の既約 $\mathcal{H}$-部分加群は, $U_{q^{1/2}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$-加群としても既約である.

参考文献

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. *Distance-regular graphs.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] V. Chari, A. Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.* 142 (1991) 261–283.

[3] H. Suzuki. The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph. *J. Algebraic Combin.* 22 (2005) 5–38.

[4] P. Terwilliger. The subconstituent algebra of an association scheme (part I). *J. Algebraic Combin.* 1 (1992) 363–388.

[5] P. Terwilliger. Introduction to Leonard pairs. *J. Comput. Appl. Math.* 153 (2003) 463–475.