直径3 の距離正則グラフのユークリッド歪みについて

栗原　大武[*]
北九州工業高等専門学校 生産デザイン工学科 一般科目
kurihara@kct.ac.jp

1　序

(X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とし，F を (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像とする．正数 C に対して，F が以下の条件を満たすとき，F を C **双リプシッツ埋め込み**と呼ぶ：

$$\exists r > 0 \text{ s.t. } r d_X(x, y) \leq d_Y(F(x), F(y)) \leq rC d_X(x, y) \tag{1}$$

for any $x, y \in X$．またある正数 C に対して F が C 双リプシッツ埋め込みであるとき，F を単に**双リプシッツ埋め込み**と呼ぶ．なお，F が双リプシッツ埋め込みならば F は単射であることに注意する．F の歪み $\mathsf{dist}\, F$ を

$$\mathsf{dist}\, F := \inf \left\{ C > 0 \;\middle|\; F \text{ は } C \text{ 双リプシッツ埋め込み} \right\}$$

により定義し，さらに X, Y **に関する歪み** $c_Y(X)$ を

$$c_Y(X) := \inf \left\{ \mathsf{dist}\, F \;\middle|\; F \text{ は双リプシッツ埋め込み} \right\}$$

により定義する．

定義より $\mathsf{dist}\, F$ は

$$\frac{\sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{d_Y(F(x), F(y))}{d_X(x, y)}}{\inf_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{d_Y(F(x), F(y))}{d_X(x, y)}} \tag{2}$$

であり, これより $\mathsf{dist}\, F \geq 1$ であることは容易にわかる．従って $c_Y(X) \geq 1$ である．また $c_Y(X) = 1$ ならば X と $F(X)(\hookrightarrow Y)$ は同型になる．

[*]supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 16K17604

Y が ℓ^p 空間であるとき，歪みの記号を $c_Y(X) = c_p(X)$ で表し，これを X の ℓ^p **歪み**と呼ぶ．特に $p = 2$ のとき，$c_2(X)$ を X の**ユークリッド歪み**と呼ぶ．X が直径 d の有限グラフからなる距離空間（距離は最短パスにより定める）の場合，$c_p(X)$ の自明な上からの評価 $c_p(X) \leq d$ が知られている．

以降，X は有限の n 点からなる距離空間とし，歪みはユークリッド歪みのみを考える．Bourgain [1] はユークリッド歪みの漸近的な値 $c_2(X) = O(\log n)$ を示した．一方で Linial and Magen [6] は歪みが最小になる最良な埋め込みの条件を示し，そして Linial, London and Rabinovich [5] によりユークリッド歪みの計算のアルゴリズムが与えられた．しかし，与えられた X に対して正確なユークリッド歪みの値を求めることは決して易しくない．今まで知られている正確なユークリッド歪みの数少ない例としては以下のとおりである．

- complete graph, $c_2(K_n) = 1$ (自明)
- Hamming graphs, $c_2(H(d,q)) = \sqrt{d}$ (Enflo [3], Vallentin [8])
- Johnson graphs, $c_2(J(v,d)) = \sqrt{d}$ (Vallentin [8])
- strongly regular graph (v,k,λ,μ), $c_2(\Gamma) = \sqrt{\frac{4(v-k-1)(k-\theta_1)}{k(v-k+\theta_1)}}$ (Vallentin [8])[1]
- generalized polygons (歪みの値は省略) (Kobayashi–Kondo [4])

なお，上で挙げたものはすべて**距離正則グラフ**である．本稿では，X が距離正則グラフであるとき，X のユークリッド歪みがどこまで正確に求められるかについて述べていく．

2 定義

以降有限集合 X に対し，$\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(X)$ を行と列が X の元で添え字づけられたサイズ $|X|$ の実正方行列の集合とする．$M \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(X)$ と $x, y \in X$ に対して，M の (x,y) 成分を M_{xy} と表す．また $\mathbb{R}^X$ を各成分が X の元で添え字づけられた $|X|$ 次の列ベクトル空間とする．$\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(X)$ は通常の行列の積の意味で $\mathbb{R}^X$ に左から作用する．

[1] ただし θ_1 は Γ の 2 番目に大きい固有値．これは (v,k,λ,μ) から決まる値である．

2.1 距離正則グラフ

ここでは距離正則グラフについて定義等を述べる．より詳しくはBrouwer–Cohen–Neumaier [2], などを参照されたい．$\Gamma = (X, E)$ を有限個の頂点からなり，辺は向きづけられておらずループや多重辺をもたないグラフとする．$x, y \in X$ に対して $\partial_\Gamma(x, y)$ を最短パスから定められる x, y の距離とし，d を Γ の直径とする．直径 d の Γ が以下の性質を満たすとき，Γ を**距離正則グラフ**と呼ぶ：各 $i = 0, 1, \ldots, d$ に対して，$x \in X$ および $\partial_\Gamma(x, y) = i$ となる $y \in X$ を任意に固定したときに

$$|\{z \in X \mid \partial_\Gamma(x, z) = i + 1,\ \partial_\Gamma(z, y) = 1\}| \tag{3}$$

$$|\{z \in X \mid \partial_\Gamma(x, z) = i,\ \partial_\Gamma(z, y) = 1\}| \tag{4}$$

$$|\{z \in X \mid \partial_\Gamma(x, z) = i - 1,\ \partial_\Gamma(z, y) = 1\}| \tag{5}$$

の値が x, y の取り方に依存せずに i のみにより定まる定数である．式 (3), (4), (5) の値をそれぞれ b_i, a_i, c_i で表す．b_0 の値を Γ の**次数**と呼ぶ．各 $i = 0, 1, \ldots, d$ に対して，$a_i + b_i + c_i = b_0$ が成り立つ．なお，$\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ を Γ の *intersection array* と呼ぶ．$A_i \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(X)$ を，$\partial_\Gamma(x, y) = i$ のとき $(A_i)_{xy} = 1$, $\partial_\Gamma(x, y) \neq i$ のとき $(A_i)_{xy} = 0$ により定め，これを距離 i に関する Γ の**距離行列**と呼ぶ．なお，各 A_i は対称行列であり，これらの固有値は全て実数である．特に A_1 の相異なる固有値を大きい順に $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$ で表す．[2] これを Γ の固有値と呼ぶ．$\{A_i\}_{i=0}^d$ の間には三項間の関係式が成り立ち，$A_i = v_i(A_1)$ なる i 次の多項式 $v_i(t)$ が一意的に定まることが知られている．$\{v_i\}_{i=0}^d$ を Γ **に付随する多項式**と呼ぶ．

$\{A_i\}_{i=0}^d$ から張られるベクトル空間は $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(X)$ の部分代数であり，これを *Bose–Mesner* **代数**と呼び，$\mathfrak{A}$ で表す．Γ の固有値 θ_j を一つ固定する．$\mathbb{R}^X$ から θ_j の固有空間への直交射影行列を E_j とすると，$E_j \in \mathfrak{A}$ であることが知られている．m_j を θ_j の固有空間の次元（θ_j の重複度）とし，

$$E_j = \frac{m_j}{|X|} \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta_j) A_i$$

とおく．このとき，$\{u_i(\theta_j)\}_{i=0}^d$ を θ_j の**余弦列**と呼ぶ．このとき $u_i(\theta_j) = \frac{v_i(\theta_j)}{v_i(\theta_0)}$, $u_0(\theta_j) = 1$, $-1 \leq u_i(\theta_j) \leq 1$ であり，さらに θ_1 の余弦列については次のことが知られている．

補題 2.1. θ_1 の余弦列は減少列である．つまり．

$$1 = u_0(\theta_1) > u_1(\theta_1) > \cdots u_d(\theta_1) \geq -1.$$

[2]相異なる固有値の数が $d + 1$ であることはよく知られている事実である．

ここで後の証明に用いる事実を述べる．

補題 2.2. 直径 *3* の距離正則グラフ Γ について以下の不等式が成り立つ．

$$\theta_0+\theta_1+\theta_3-a_1-a_2>0.$$

証明の概略．$d=3$ のとき，$\theta_0+\theta_1+\theta_2+\theta_3=a_1+a_2+a_3$ であることと，$\begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & b_0-c_2-b_1 & b_2 \\ 0 & c_2 & b_0-c_3-b_2 \end{pmatrix}$ の固有値が $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ であることが知られており，interlacing theorem を用いれば欲しい不等式を得る． □

予想 2.3. 補題 *2.2* は直径 d のとき，$\theta_0+\theta_1+\theta_d-a_1-a_2\geq 0$ のように一般化され，これが成り立つと予想される．[3]

2.2　グラフの球面への埋め込み

ℓ^2 の二点 $(a_i)_i,(b_i)_i$ の距離を $\|(a_i)_i-(b_i)_i\|^{1/2}=(\sum_i(a_i-b_i)^2)^{1/2}$ によって定める．

定義 2.4 (性質 A[4])**.** $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間とする．このとき写像 $F\colon X\to Y$ が以下の性質を持つとき，F は性質 A をもつという：$x,y,x',y'\in X$ に対して，

$$d_X(x,y)=d_X(x',y')\ \Rightarrow\ d_Y(F(x),F(y))=d_Y(F(x'),F(y')).$$

X がグラフかつ $F\colon X\to Y$ が性質 A をもつとき，$d_Y(F(x),F(y))$ は X の距離 $\partial_\Gamma(x,y)$ にのみ依存して決まるので．今後は $\partial_\Gamma(x,y)=i$ のとき，$d_Y(F(x),F(y))=d_Y(i)$ と書くことにする．

性質 A をもつ例として，距離正則グラフの θ_j に関する埋め込みが知られている．

定義 2.5 (θ_j に関する埋め込み)**.** $\Gamma=(X,E)$ を距離正則グラフとする．このとき固有値 θ_j に関する Γ の埋め込み $F_j\colon X\to\mathbb{R}^X\subset\ell^2$ を次のように定義する：頂点 $x\in X$ に対応する $\mathbb{R}^X$ の標準基底 e_x とするとき $F_j(x):=\frac{|X|}{m_j}E_je_x$.

[3] Jack Koolen 氏より $d\geq 7$ ならば $\theta_1\geq a_2$ が成り立つことから $d\geq 7$ のときはこの予想は正しいというコメントをいただいている．

[4] 性質 A にはきっと相応しい名前がついているはずでしょうが，筆者は調べても見つけることができませんでした．もしこの性質に相応しい名前をご存知でしたらご教授いただけると幸いです．

E_j の性質より, $\partial_\Gamma(x,y)=i$ ならば, $F_j(x)$ と $F_j(y)$ の内積は $(F_j(x),F_j(y))=u_i(\theta_j)$ を満たす．これより $\|F_j(x)-F_j(y)\|^2=2(u_0(\theta_j)-u_i(\theta_j))$ となり，F_j は性質 A をもつことがわかる．

定義 2.6. $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間とし，$F\colon X\to Y$ を写像とする．

- $(x,y)\in X\times X$ が，任意の $(x',y')\in X\times X$ に対して，
$$\frac{d_Y(F(x),F(y))}{d_X(x,y)}\geq\frac{d_Y(F(x'),F(y'))}{d_X(x',y')}$$
を満たすとき，$(x,y)\in X\times X$ を**伸張**したペアと呼ぶ．
- $(x,y)\in X\times X$ が，任意の $(x',y')\in X\times X$ に対して，
$$\frac{d_Y(F(x),F(y))}{d_X(x,y)}\leq\frac{d_Y(F(x'),F(y'))}{d_X(x',y')}$$
を満たすとき，$(x,y)\in X\times X$ を**縮約**したペアと呼ぶ．

さらに，X がグラフかつ $F\colon X\to Y$ が性質 A をもつとき，

- 距離 i が，任意の距離 i' に対して，$d_Y(i)/i\geq d_Y(i')/i'$ を満たすとき，i を伸張した距離と呼ぶ．
- 距離 i が，任意の距離 i' に対して，$d_Y(i)/i\leq d_Y(i')/i'$ を満たすとき，i を縮約した距離と呼ぶ．

性質 A をもつグラフの埋め込みに対していくつの性質を与える．

補題 2.7. グラフの性質 A をもつ埋め込みの像はある球面 $\mathbb{S}^N$ 上に乗る．

補題 2.8. グラフ $\Gamma=(X,E)$ について，$F\colon X\to\mathbb{S}^N$ を性質 A をもつ埋め込みとする．このとき伸張した距離は $i=1$ に限る．

証明の概略. 三角不等式と球面が平坦でないことから導かれる． □

3 主結果

この節では，今回のシンポジウムで紹介した結果やシンポジウム後に得られた結果を紹介する．証明の概略は 4 節で述べる．$\Gamma=(X,E)$ を直径 d の距離正則グラフとし，Γ に付随する多項式を $\{v_l(t)\}_{l=0}^d$，Γ の固有値を $\{\theta_j\}_{j=0}^d$ とおく．またこれらのパラメータに対して

$$\Upsilon(j,l)=l^2\frac{v_l(\theta_0)}{v_1(\theta_0)}\frac{v_1(\theta_0)-v_1(\theta_j)}{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)}$$

$(1 \le j, l \le d)$ とおく．

まずは直径 d の距離正則グラフのユークリッド歪みについて，パラメータを用いた非自明な不等式を与える．なお，下からの不等式については元々 Vallentin [8] により類似のものが得られていたが，今回の結果はそれを少し改良したものである．

定理 3.1. $\Gamma = (X, E)$ を直径 d の距離正則グラフとする．このとき

$$\max_{l \in \{2,3,\ldots,d\}} \min_{j \in \{1,2,\ldots,d\}} \Upsilon(j,l) \le c_2(\Gamma)^2 \le \min_{j \in \{1,2,\ldots,d\}} \max_{l \in \{2,3,\ldots,d\}} \Upsilon(j,l)$$

がなりたつ．

定理 3.1 では，ユークリッド歪みの評価しか与えていないが，直径が 3 の場合には，ユークリッド歪みの正確な値は決定できる．これにより Vallentin [8] が示した強正則グラフ（直径 2 の距離正則グラフ）のユークリッド歪みの決定の次なるステップを踏んだことになる．

定理 3.2. $\Gamma = (X, E)$ を直径 *3* の距離正則グラフとする．このとき

$$\begin{aligned} c_2(\Gamma)^2 &= \max\{\Upsilon(1,2), \Upsilon(1,3)\} \\ &= \max\left\{ \frac{4b_1}{\theta_0 + \theta_1 - a_1}, \frac{9b_1b_2}{(\theta_0+\theta_1-a_1)(\theta_0+\theta_1-a_2) - \theta_0\theta_1 - b_1c_2 - \theta_0} \right\}. \end{aligned}$$

さらに，θ_1 に関する埋め込みはこのユークリッド歪みと同じ歪みを与える．

この結果より直径 3 の距離正則グラフについては，パラメータさえ同じであれば非同型なものでもユークリッド歪みは同じになることを示唆している．ユークリッド歪みは幾何的な情報をもつものだが，それがパラメータという情報で支配できることは興味深いと思われる．

定理 3.2 では $\Upsilon(1,2), \Upsilon(1,3)$ の大小関係については言及されていないのであるが，さらに Γ に条件を課せば，$\Upsilon(1,2), \Upsilon(1,3)$ の大小関係が決定できる．

定理 3.3. 直径 *3* の距離正則グラフについて $u_2(\theta_1) \le 1/9$ であれば，$\Upsilon(1,2) \le \Upsilon(1,3)$ が成り立つ．つまり，$c_2(\Gamma)^2 = \Upsilon(1,3)$ である．

なおこの結果はシンポジウム後に得られたものである．

4 定理 3.1, 3.2, 3.3 の証明の概略

4.1 定理 3.1 についての証明

上からの評価については θ_j の埋め込み F_j を考えることで得られる．具体的には F_j は性質 A をもつので，式 (2) の分子，分母はグラフの距離ご

との比で決まり，さらに補題 2.8 により

$$(\mathsf{dist}\, F_j)^2 = (\frac{\partial(1)}{\partial_\Gamma(1)})^2 / \left(\min_{l\geq 2} \frac{\partial(l)}{\partial_\Gamma(l)}\right)^2 = (u_0(\theta_j) - u_1(\theta_j)) / \min_{l\geq 2} \frac{u_0(\theta_j) - u_l(\theta_j)}{l^2}$$
$$= \max_{l\geq 2} \Upsilon(j,l)$$

を得る．さらに $c_2(\Gamma)$ は双リプシッツ埋め込みの中の歪みの中で最小のものであったのですべての F_j の埋め込みを考えれば $c_2(\Gamma)^2 \leq \min_j(\max_l \Upsilon(j,l))$ を得る．

下からの評価については若干の準備が必要である．まずは Vallentin による事実を紹介する．

定理 4.1 (Vallentin [8])**.** Γ を距離正則グラフとし，F を Γ の ℓ^2 への双リプシッツ埋め込みとする．このとき F に対して性質 A をもつ Γ の ℓ^2 への埋め込み $\tilde{F}$ で

$$\mathsf{dist}(\tilde{F}) \leq \mathsf{dist}(F)$$

となるものが存在する．

つまり Theorem 4.1 より，距離正則グラフの最良な埋め込みを考える際には性質 A をもつ埋め込みだけを考えれば良いということになる．距離正則グラフの性質 A をもつ埋め込みについては Poincaré 不等式と呼ばれる不等式が成り立つ．もっと一般的な Poincaré 不等式については Ostrovskii [7] などを参考にされたい．

定理 4.2 (Poincaré 不等式)**.** $l \in \{2,3,\ldots,d\}$ をひとつ固定する．このとき性質 A をもつ距離正則グラフの任意の双リプシッツ埋め込み F に対して次の *Poincaré* 不等式が成り立つ．

$$\sum_{\substack{u,v\in X \\ \partial_\Gamma(u,v)=l}} \alpha_l \|F(u)-F(v)\|^2 \leq \sum_{\substack{u,v\in X \\ \partial_\Gamma(u,v)=1}} \|F(u)-F(v)\|^2,$$

ここで $\alpha_l := \min_{j\in\{1,2,\ldots,d\}} \frac{v_1(\theta_0)-v_1(\theta_j)}{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)}$ である。ただし $v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)=0$ のときには $\frac{v_1(\theta_0)-v_1(\theta_j)}{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)} = +\infty$ と定義する．

Poincaré 不等式が成り立つと性質 A をもつ距離正則グラフの C 双リプシッツ埋め込み F に対して

$$C^2 \geq \frac{\sum_{\substack{u,v\in X \\ \partial_\Gamma(u,v)=l}} \alpha_l \partial_\Gamma(u,v)^2}{\sum_{\substack{u,v\in X \\ \partial_\Gamma(u,v)=1}} \partial_\Gamma(u,v)^2}$$

が成り立つことが知られている．いま F を最良であるような性質 A をもつ埋め込みとする．このとき $|\{(u,v) \mid \partial_\Gamma(u,v)=l\}| = |X|v_l(\theta_0)$ と Poincaré 不等式がなりたっているので，

$$
\begin{aligned}
c_2(\Gamma)^2 = \mathsf{dist}(F)^2 &\geq \frac{\sum_{\substack{u,v\in X\\ \partial_\Gamma(u,v)=l}} \alpha_l \partial_\Gamma(u,v)^2}{\sum_{\substack{u,v\in X\\ \partial_\Gamma(u,v)=1}} \partial_\Gamma(u,v)^2} = \frac{\sum_{\substack{u,v\in X\\ \partial_\Gamma(u,v)=l}} \alpha_l l^2}{\sum_{\substack{u,v\in X\\ \partial_\Gamma(u,v)=1}} 1} \\
&= \frac{|X|v_l(\theta_0)\alpha_l l^2}{|X|v_1(\theta_0)} = \min_{j\in\{1,2,\ldots,d\}} l^2 \frac{v_l(\theta_0)}{v_1(\theta_0)} \frac{v_1(\theta_0)-v_1(\theta_j)}{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)}
\end{aligned}
$$

がなりたつ．さらにこのとき l はどのように取っても良いので定理 3.1 の下からの評価を得る．

4.2 定理 3.2 についての証明

定理 3.2 を証明するためには $d=3$ のときに定理 3.1 の上からと下からの評価の値が一致することを言えばよい．興味深いことにそれらの値は変数 l,j の $\max, \min$ を入れ替えたものになっており，等号が成り立つ条件はいくつか知られている．その中で今回使える形を紹介する．

補題 4.3 (min-max 不等式)．J,L を有限集合とし，f を $J\times L$ 上の実数関数とする．このとき次が成り立つ．

- (i) $\max_{l\in L}\min_{j\in J} f(j,l) \leq \min_{j\in J}\max_{l\in L} f(j,l)$.
- (ii) もし条件「$\exists j_0 \in J \ s.t. \ \forall l \in L,\ f(j_0,l) = \min_{j\in J} f(j,l)$」が成り立てば，*(i)* の等号が成り立つ．

定理 3.2 を証明する．$\Upsilon(j,l)$ に対して補題 4.3 (ii) の仮定を満たす j_0 を見つければよい．具体的には $j_0=1$ であることを示せば十分である．$\Upsilon(1,l) = \min_j \Upsilon(j,l)$ であることと

$$
\frac{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_1)}{\theta_0-\theta_j} = \max_{1\leq j\leq 3} \frac{v_l(\theta_0)-v_l(\theta_j)}{\theta_0-\theta_j}. \tag{6}
$$

は同値である．あとは $l=2,3$ のときに式 (6) が成り立つことを示せばよい．

(I) $l=2$: $v_2(\theta) = \frac{1}{c_2}(\theta^2 - a_1\theta - \theta_0)$ であることが知られているので，

$$
\frac{v_2(\theta_0)-v_2(\theta_j)}{\theta_0-\theta_j} = \frac{(\theta_0^2-\theta_j^2)-a_1(\theta_0-\theta_j)}{c_2(\theta_0-\theta_j)} = \frac{\theta_0+\theta_j-a_1}{c_2}
$$

となり，θ_j が最大になるのは $j=1$ のときである．

(II) $l=3$: $v_3(\theta)=\frac{1}{c_2c_3}(\theta^3-(a_1+a_2)\theta^2+(a_1a_2-b_1c_2-\theta_0)\theta-\theta_0a_2)$ であることが知られており，これを用いて計算すると

$$\begin{aligned}\frac{v_3(\theta_0)-v_3(\theta_1)}{\theta_0-\theta_1}-\frac{v_3(\theta_0)-v_3(\theta_j)}{\theta_0-\theta_j}&=\frac{\theta_1-\theta_j}{c_2c_3}(\theta_0+\theta_1+\theta_j-a_1-a_2)\\&\geq\frac{\theta_1-\theta_j}{c_2c_3}(\theta_0+\theta_1+\theta_3-a_1-a_2)\end{aligned}$$

であり，補題 2.2 と $\frac{\theta_1-\theta_j}{c_2c_3}>0$ から欲しい不等式を得る．

また $j_0=1$ であることから θ_1 に関する埋め込みが最良であることも従う．

4.3 定理 3.3 の証明

定理 3.2 より θ_1 に関する埋め込みのみを考える．すると $u_2(\theta_1)\leq 1/9$ の仮定と $u_3(\theta_1)\geq -1$ より

$$\frac{\Upsilon(1,3)}{\Upsilon(1,2)}=\frac{3^2}{2^2}\frac{v_3(\theta_0)}{v_2(\theta_0)}\frac{v_2(\theta_0)-v_2(\theta_1)}{v_3(\theta_0)-v_3(\theta_1)}=\frac{9(1-u_2(\theta_1))}{4(1-u_3(\theta_1))}\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{8/9}{2}=1$$

を得る．よって定理 3.3 の証明は完了した．

5 最後に

講演中にも述べたが，今回得られた結果はまだやり残したことも多くもっと強いことが示せるのではないかと期待している．それらのことをまとめとして記述する．

まず定理 3.3 で，$u_2(\theta_1)\leq 1/9$ の仮定を課したが，この仮定を満たさない直径 3 の距離正則グラフの intersection array はそれほど多くないようである．実際，[2] にあるリスト及び，次数が 67 以下の feasible parameter に関して $u_2(\theta_1)>1/9$ であるものをすべて計算したところ以下のもののみが現れた．[5]

- Hamming graph $H(3,q)$ $(q>4)$ の interseion array
- Johnson graph $J(v,3)$ $(v>12)$ の interseion array
- folded Johnson graph $\bar{J}(14,7)$ の interseion array
- $\{38,34,12;1,2,12\}$, $\{46,42,15;1,1,12\}$[6]

[5] 67 という数字は数学的には何の意味もなく，筆者がもつ計算機の能力に依存したものである．

[6] これらはどちらも formally self-dual である．筆者はこれを実現する距離正則グラフを見つけることができなかった．

そしてこれらの intersection array に関してすべて $\Upsilon(1,3) > \Upsilon(1,2)$ であることを確認できた．従って $u_2(\theta_1) \leq 1/9$ の仮定は不要で，すべての直径 3 の距離正則グラフに関して $c_2(\Gamma)^2 = \Upsilon(1,3)$ が成り立つと予想される．

また $d \geq 4$ の場合も定理 3.2 と同様のことが成り立つことが予想される．[2] にあるリストに関して計算をしたがすべて $j_0 = 1$ で成り立っていることが確認できた．しかし興味深いことに縮約する距離についてはすべてが $l = d$ とは限らないようである．例えば，$\{22, 21, 20, 3, 2, 1; 1, 2, 3, 20, 21, 22\}$ の距離正則グラフについては $d = 6$ であるが，縮約する距離は 5 であることが確かめられた．

参考文献

[1] J. Bourgain. *On Lipschitz embeddings of finite metric spaces in Hilbert spaces.* Israel J. Math., **53**:46–52, 1985.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[3] P. Enflo. *On the nonexistence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces.* Ark. Mat., **8**:103–105, 1969.

[4] T. Kobayashi and T. Kondo. *The Euclidean distortion of generalized polygons.* Adv. Geom., **15**(4):499–506, 2015.

[5] N. Linial, E. London and Y. Rabinovich. *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications.* Combinatorica, **15**(2):215–245, 1995.

[6] N. Linial and A. Magen. *Least-distortion Euclidean embeddings of graphs: Products of cycles and expanders.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, **79**(2):157–171, 1995.

[7] M. I. Ostrovskii. *Metric Embeddings.* de Gruyter studies in math., **49**, 2013.

[8] F. Vallentin. *Optimal distortion embeddings of distance regular graphs into Euclidean spaces.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, **98**(1):95–104, 2008.