最小次数の大きい集合族、部分空間族

琉球大学教育学部 徳重典英

1. はじめに

k グラフ（k 点部分集合族）H が交差族であれば、そのサイズ $|H|$ は小さい。一方、H の最小次数が大きければ、$|H|$ は大きい。実は、交差族 H の最小次数をうまく設定すると、H の構造が一意に決まる。本稿ではこの事実を線形代数的に証明する方法について解説する。

n 頂点上の k グラフを定義するため、

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

とおき、$[n]$ の k 点部分集合全体を $\binom{[n]}{k}$ と書く。つまり、

$$\binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] : |x| = k\}$$

である。$H \subset \binom{[n]}{k}$ を（$[n]$ を頂点集合とする）k グラフという。

k グラフ H（あるいはもっと一般に集合族 $H \subset 2^{[n]}$）は、任意の $x, y \in H$ に対して $x \cap y \neq \emptyset$ を満たすとき交差族とよばれる。例えば

$$H_{\mathrm{EKR}} := \{x \in \binom{[n]}{k} : 1 \in x\}$$

は交差族であり、これを「1 を中心にもつ star」ともいう。そのサイズは $|H_{\mathrm{EKR}}| = \binom{n-1}{k-1}$ である。次の定理は、サイズ最大の交差族の構造を決定するものである。

定理 1 (Erdős–Ko–Rado[2])**.** $n > 2k$ で $H \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、$|H| \le \binom{n-1}{k-1}$ が成り立つ。等号成立は $H \cong H_{\mathrm{EKR}}$ に限る。

H の頂点 $i \in [n]$ の次数を

$$\deg_H(i) := \#\{x \in H : i \in x\}$$

と定め、H の最小次数を

$$\delta(H) := \min_i \deg_H(i)$$

と定義する。例えば $H = H_{\mathrm{EKR}}$ の場合、頂点 1 の次数は $\deg_H(1) = \binom{n-1}{k-1}$ であるが、$i = 2, 3, \dots, n$ に対しては、$\deg_H(i) = \binom{n-2}{k-2}$ となる。従って $\delta(H_{\mathrm{EKR}}) = \binom{n-2}{k-2}$ である。同様に H の最大次数を

$$\Delta(H) := \max_i \deg_H(i)$$

Date: August 30, 2016.
The author was supported by JSPS KAKENHI 25287031.

と定義する。最近、Huang と Zhao は次のことを示した。

定理 2 (Huang–Zhao[6]). $n > 2k$ で $H \subset \binom{[n]}{k}$ が $\delta(H) \geq \delta(H_{\mathrm{EKR}})$ を満たす交差族ならば、$H \cong H_{\mathrm{EKR}}$ である。

彼らの証明は Kneser graph の固有値を利用する代数的なものである。また等角直線の性質を最小次数の制限と組み合わせて用いる。これに対して Frankl は $n \geq 3k$ を仮定すれば、純粋に組合せ論的な方法でもこの結果が得られることを示した。さらに Huang と Zhao は Frankl の証明に現れる不等式の扱いを慎重に行うことで、$n > 2k + 1$ を仮定すれば上の定理の組合せ論的な証明が得られることを示した。これらの組合せ論的証明に使われる主な道具は次のものであり、これは後で述べる Hilton–Milner の定理の拡張になっている。

定理 3 (Frankl[4]). $H \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族で、

$$\Delta(H) \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-j-1}{k-1}$$

をみたす $2 \leq j \leq k$ が存在すれば、

$$|H| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-j-1}{k-1} + \binom{n-j-1}{k-j}.$$

この定理の証明には shifting という手法が用いられる。

今回、Huang と Zhao の代数的手法を用いることで、定理 2 の q 類似（ベクトル空間版）を得た。この結果を述べるため、q を素数冪とし V_n で q 元体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間をあらわす。V_n の k 次元部分空間全体を $\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ とかく。すなわち、$\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix} := \{x \leq V_n : \dim x = k\}$. このとき $H \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が交差族であるとは、任意の $x, y \in H$ について $\dim(x \cap y) \geq 1$ が成り立つことと定義する。$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := |\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}|$ とおく。

定理 4. $n \geq 2k$ で $H \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が交差族で、任意の *line* $l \in \begin{bmatrix} V_n \\ 1 \end{bmatrix}$ について

$$\#\{x \in H : l \leq x\} \geq \begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}$$

ならば、H はある *line* を含む k 次元部分空間全体である。

shifting は集合族に対して定義され、部分集合族の性質を調べるための強力な道具である。その q 類似（つまり部分空間族における shifting の定義）をどのように定式化すべきかは重要な未解決問題である。実は shifting の q 類似を主張する論文がいくつか出版されているが、残念ながらそれらはすべてその後に不具合が見つかっている。このため定理 3 の q 類似も得られておらず、現時点では定理 4 を組合せ論的に証明する方法は知られていない。

定理 4 の証明は定理 2 のものと本質的に同じ（だが計算は煩雑）だから、次節では定理 2 の証明を他の設定にも応用可能なようにやや整理した形で紹介し、最後の節で関連する問題を紹介する。

2. Huang と Zhao の証明

この節では定理 2 の Huang と Zhao による証明の概略を紹介する。

Kneser graph $G = G_{n,k}$ は、$V(G) = \binom{[n]}{k}$ を頂点集合とし、辺集合は

$$E(G) = \{xy : x, y \in V(G),\, x \cap y = \emptyset\}$$

で定義される。G の隣接行列 $A = (a_{x,y})$ の線形代数的な性質をまとめておこう。この行列は $s = 0, 1, \ldots, k$ に対して固有値

$$\lambda_s = (-1)^s \binom{n-k-s}{k-s}$$

を重複度

$$m_s = \binom{n}{s} - \binom{n}{s-1}$$

で持つ。λ_s の固有空間を W_s とする $(\dim W_s = m_s)$。$E := \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ は

$$E = W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

と直和分解される。$W_0 \oplus \cdots \oplus W_i$ は $[n]$ の i 点部分集合の特性ベクトル全体で生成される。E の標準内積に関する正規直交基底を $v_1, v_2, \ldots, v_{\binom{n}{k}}$ とする。ただし、W_0 の正規直交基底を v_1, W_1 の正規直交基底を $v_2, \ldots, v_n$ 等とする。

定理 2 の条件をみたす H をとり、その特性ベクトルを $\mathbf{1}_H \in E$ とする。すなわち $\mathbf{1}_H$ の x 成分は $x \in H$ なら 1, そうでなければ 0 である。このベクトルを v_i たちの基底で展開し、

$$\mathbf{1}_H = f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_{\binom{n}{k}} v_{\binom{n}{k}} \tag{1}$$

としよう。H のサイズを e とおくと、

$$e = |H| = \langle \mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H \rangle = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} f_i^2 \tag{2}$$

である。一方、$v_1 = \mathbf{1}/\|\mathbf{1}\|$ に注意すると

$$e = \langle \mathbf{1}_H, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{1}_H, \|\mathbf{1}\| v_1 \rangle = f_1 \|\mathbf{1}\| \langle v_1, v_1 \rangle = f_1 \sqrt{\binom{n}{k}} \tag{3}$$

を得る。ここで証明のポイントとなる量

$$F := f_2^2 + \cdots + f_n^2$$

を導入する。(2) と (3) から

$$e = f_1^2 + F + \sum_{i=n+1}^{\binom{n}{k}} f_i^2 \geq e^2 / \binom{n}{k} + F \tag{4}$$

が従う。ここで、$e_* = \frac{k-1}{n-1}\binom{n}{k}$ とおく。最小次数の仮定から $e \geq e_*$ である。実際、

$$e = \sum_{x\in[n]} \deg_H(x)/k \geq \delta(H)n/k \geq \binom{n-2}{k-2}n/k = \tfrac{k-1}{n-1}\binom{n}{k} = e_*$$

であり、さらに上の計算から e_* は全ての頂点の次数が $\binom{n-2}{k-2}$ の k グラフのサイズであることがわかる。証明の中心は次の主張を示すことである。

主張 1. F は次の二つの不等式をみたす。

(i) $\binom{n}{k}F \geq (n-1)e(e-e_*)$,

(ii) $\binom{n}{k}F \leq \frac{k}{n-k}(n-1)^2(e-e_*)^2$.

大雑把に言えば、(i) は H が交差族だから e が小さいこと、(ii) は H の最小次数が大きいから e が大きいことに対応する。

$e > e_*$ と主張 1 を仮定すると、(i) と (ii) から $e \geq \binom{n-1}{k-1}$ が従う。一方、(i) と (4) からは $e \leq \binom{n-1}{k-1}$ を得る。つまり $e = \binom{n-1}{k-1}$ でなければばならない。よって定理 1 から $H \cong H_{\mathrm{EKR}}$ を得る。従って定理 2 の証明を完了させるには、主張 1 および $e > e_*$ を示せばよい。

はじめに主張を証明する。(i) は H が交差族であることから従う。これを見るには $\langle A\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H\rangle$ を二通りに計算する。まず、$\langle A\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H\rangle = \sum_{x,y} a_{x,y}(\mathbf{1}_H)_x(\mathbf{1}_H)_y$ であるが、$(\mathbf{1}_H)_x(\mathbf{1}_H)_y \neq 0$ ならば $x, y \in H$, すなわち $x \cap y \neq \emptyset$ であり、Kneser graph の定義から $a_{x,y} = 0$ である。ゆえに x, y に依らずいつでも $a_{x,y}(\mathbf{1}_H)_x(\mathbf{1}_H)_y = 0$ であり、

$$\langle A\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H\rangle = 0$$

となる。一方、$\langle A\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H\rangle = \langle A\sum_i f_i v_i, \sum_j f_j v_j\rangle$ と展開し、$\lambda_0 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_3 > \lambda_1$ を用いると

$$\begin{aligned}\langle A\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_H\rangle &= \lambda_0 f_1^2 + \lambda_1(f_2^2 + \cdots + f_n^2) + \lambda_2(f_{n+1}^2 + \cdots + f_{\binom{n}{2}}^2) + \cdots \\ &\geq \lambda_0 f_1^2 + \lambda_1 F + \lambda_3(f_{n+1}^2 + \cdots + f_{\binom{n}{k}}^2) \\ &= \tbinom{n-k}{k}f_1^2 - \tbinom{n-k-1}{k-1}F - \tbinom{n-k-3}{k-3}(e - f_1^2 - F),\end{aligned}$$

ここで最後の項には (2) を用いた。さらに $\binom{n-k-3}{k-3} < \frac{k-1}{n-k}\binom{n-k}{k}$ と (3) も使うと

$$0 \geq \tbinom{n-k}{k}e^2/\tbinom{n}{k} - \tbinom{n-k-1}{k-1}F - \tfrac{k-1}{n-k}\tbinom{n-k}{k}(e - e^2/\tbinom{n}{k} - F), \tag{5}$$

ただし、等号成立には

$$e - e^2/\tbinom{n}{k} - F = 0 \tag{6}$$

が必要である。(6) は不等式 (4) で等号が成り立つこと、つまり $\mathbf{1}_H \in W_0 \oplus W_1$ を意味する。(5) を整理すると (i) を得る。また (i) で等号が成立するには (6) が必要である。

(ii) の証明では、H の最小次数の上からと下から評価を利用する。下からの評価は定理の仮定であり、上からの評価には次の補題を用いる。

補題 1 (Huang–Zhao[6])**.** 単位ベクトル $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^{n-1}$ が、$i \neq j$ ならば $\langle u_i, u_j\rangle = c$ *(*定数*)* を満たすとせよ。このとき任意の $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、うまく i をとると $\langle v, u_i\rangle \leq -\frac{\|v\|}{n-1}$ が成り立つ。

この補題の証明の概略は次の通り。補題の仮定を満たす $u_1, \dots, u_n$ は自動的に regular simplex の頂点となり、$c = -\frac{1}{n-1}$ でなければならない。$\{u_1, \dots, u_n\} \setminus \{u_i\}$ たちの非負係数線形結合で張られる cone を C_i とおくと、$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^n C_i$ である。従って、与えられた v に対して $v \in C_i$ となる i がある。このとき $\langle v, u_i \rangle \le c\|v\|$ が成り立つ。

頂点 i を中心とする star, すなわち $\{x \in \binom{[n]}{k} : i \in x\}$ の特性ベクトルを $\mathbf{1}_i \in E$ と書く。このとき $\mathbf{1}_i \in W_0 \oplus W_1$ である。（実際、$g := \mathbf{1}_i - \frac{k}{n}\mathbf{1}$ とおけば $Ag = \lambda_1 g$.）従って

$$\mathbf{1}_i = \alpha_{i1}v_1 + \alpha_{i2}v_2 + \cdots + \alpha_{in}v_n$$

と展開できる。$u'_j := (\alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jn})$ を正規化して単位ベクトル $u_j := u'_j/\|j'_j\|$ を定める。これら $u_1, \dots, u_n$ は補題 1 の仮定を満たす。従って (1) の係数から $v := (f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ を定め、うまく i を選ぶと $\langle v, u_i \rangle \le -\frac{\|v\|}{n-1}$ が成り立つ。つまり

$$f_2\alpha_{i2} + \cdots + f_n\alpha_{in} \le -\sqrt{f_2^2 + \cdots + f_n^2}\sqrt{\alpha_{i2}^2 + \cdots + \alpha_{in}^2}\,/(n-1). \tag{7}$$

右辺は（従って左辺も）0 または負であることに注意せよ。この不等式は頂点 i の次数が小さいことを意味する。一方、最小次数に関する仮定 $\delta(H) \ge \binom{n-2}{k-2}$ から任意の j に対して

$$\langle \mathbf{1}_H, \mathbf{1}_j \rangle \ge \binom{n-2}{k-2}$$

であるから、$j = i$ についてもこの不等式は成り立つ。つまり、

$$f_1\alpha_{i1} + f_2\alpha_{i2} + \cdots + f_n\alpha_{in} \ge \binom{n-2}{k-2}. \tag{8}$$

(7) と (8) から

$$f_1\alpha_{i1} - \tbinom{n-2}{k-2} \ge -(f_2\alpha_{i2} + \cdots + f_n\alpha_{in}) \ge \sqrt{f_2^2 + \cdots + f_n^2}\sqrt{\alpha_{i2}^2 + \cdots + \alpha_{in}^2}/(n-1) \tag{9}$$

ここで（(2), (3) で e を表したように）$\|\mathbf{1}_i\|^2 = \binom{n-1}{k-1}$ を二通りに計算する。一つ目は、

$$\tbinom{n-1}{k-1} = \langle \mathbf{1}_i, \mathbf{1}_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2, \tag{10}$$

二つ目は

$$\tbinom{n-1}{k-1} = \langle \mathbf{1}_i, \mathbf{1} \rangle = \langle \sum \alpha_{ij}v_j, \|\mathbf{1}\|v_1 \rangle = \sqrt{\tbinom{n}{k}}\alpha_{i1}. \tag{11}$$

(11) と (3) より $f_1\alpha_{i1} = e\binom{n-1}{k-1}/\binom{n}{k} = ek/n$. これと (10) を (9) に代入すると

$$ek/n - \tbinom{n-2}{k-2} \ge \sqrt{F}\sqrt{\tbinom{n-1}{k-1} - \tbinom{n-1}{k-1}^2/\tbinom{n}{k}}\,/(n-1).$$

これを整理して (ii) を得る。以上で主張 1 が示された。

最後に $e > e_*$ を確かめる。$e \ge e_*$ はわかっているから $e = e_*$ を仮定して矛盾を出そう。このとき主張 1 から $F = 0$ である。また (i)（と (ii)）で等号が成り立つから (6) も成り立ち、従って $e = \binom{n}{k}$ である。これは $e = e_* = \frac{k-1}{n-1}\binom{n}{k}$ に矛盾する。

以上が定理 2 の証明の概略である。 $\square$

定理 4 も定理 2 と同様に証明できる。主張 1 に対応するものは次のようになる。

主張 2. F は次の二つの不等式をみたす。

(i) $\left[{n \atop k}\right] F \geq \frac{q^n-q}{q-1}\, e\,(e-e_*)$,

(ii) $\left[{n \atop k}\right] F \leq \frac{q^k-1}{q^n-q^k} \left(\frac{q^n-q}{q-1}\right)^2 (e-e_*)^2$.

3. 関連する問題

3.1. **固定点をもたない交差族.** k グラフ H が頂点 i を固定するとは、H の任意の辺が i を含むことをいう。例えば H_{EKR} は頂点 1 を固定する（1 を固定点に持つともいう）。Huang と Zhao の結果（定理 2）から、$H \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族で $\delta(H) \geq \binom{n-2}{k-2}$ を満たせば、H は固定点を持つ。では固定点を持たない交差族についてはどんなことが言えるだろうか？ここで、$y := \{2, 3, \ldots, k+1\}$ とおき、

$$H_{\mathrm{HM}} := \{x \in \binom{[n]}{k} : 1 \in x,\, x \cap y \neq \emptyset\} \cup \{y\}$$

と定めると、H_{HM} は固定点を持たない交差族である。（しかし $H_{\mathrm{HM}} \setminus \{y\}$ は 1 を固定する。）H_{HM} の最小次数は、頂点 i $(i = k+2, \ldots, n)$ で与えられ、$\delta(H_{\mathrm{HM}}) = \binom{n-2}{k-2} - \binom{n-k-2}{k-2}$ である。k を固定して $n \to \infty$ のとき、$\delta(H_{\mathrm{HM}}) = \Theta(n^{k-3})$ である。

定理 5 (Hilton–Milner[5])**.** $k \geq 4,\ n > 2k$ とする。$H \subset \binom{[n]}{k}$ が固定点をもたない交差族ならば $|H| \leq |H_{\mathrm{HM}}|$ が成り立つ。等号成立は $H \cong H_{\mathrm{HM}}$ に限る。

そこで次の問題が自然に考えられる。

問題 1. $k \geq 4,\ n > 2k$ とする。$H \subset \binom{[n]}{k}$ が固定点をもたない交差族で $\delta(H) \geq \delta(H_{\mathrm{HM}})$ ならば、$H \cong H_{\mathrm{HM}}$ か？

k を固定して $n \to \infty$ の状況を考えると、$|H_{\mathrm{EKR}}| = \Theta(n^{k-1})$, $|H_{\mathrm{HM}}| = \Theta(n^{k-2})$ である。定理 5 から固定点を持たない交差族のサイズは $O(n^{k-2})$ である。ここから、$n \gg k$ ならば定理 2 は容易に従う。というのは、$H \subset \binom{[n]}{k}$ が $\delta(H) \geq \binom{n-2}{k-2} = \Theta(n^{k-2})$ をみたせば、$|H| \geq n\delta(H)/k = \Omega(n^{k-1})$ であり、（定理 5 より）これは H が交差族ならば固定点を持つことを意味する。従って頂点のラベルを付けかえて $H \subset H_{\mathrm{EKR}}$ としてよいが、$\delta(H) \geq \binom{n-2}{k-2}$ をみたすには $H = H_{\mathrm{EKR}}$ でなければならない。

3.2. t **交差族.** k グラフ H は、任意の $x, y \in H$ に対して $|x \cap y| \geq t$ を満たすとき t 交差族という。定理 2 の t 交差族版を考えるために、最小次数の概念を拡張しよう。$\tau \subset [n]$ に対して

$$\deg_H(\tau) := \#\{x \in H : \tau \subset x\}$$

と定め、H の t 最小次数 $\delta_t(H)$ を

$$\delta_t(H) := \min_{\tau \in \binom{[n]}{t}} \deg_H(\tau)$$

と定義する。$t=1$ のとき $\delta_1(H)$ は通常の最小次数 $\delta(H)$ である。t 交差族は、$\bigcap H := \bigcap_{x\in H} x$ のサイズが t 以上であるとき、自明であるという。例えば

$$H_{\mathrm{EKR}}^{(t)} := \{x \in \binom{[n]}{k} : [t] \subset x\}$$

は自明な t 交差族であり、$n > 2k-t$ ならば $\delta_t(H_{\mathrm{EKR}}^{(t)}) = \binom{n-2t}{k-2t}$ である。自明でない t 交差族 H、すなわち、$|\bigcap H| < t$ なる t 交差族の最大サイズは決定されており ([1, 3])、特に $k \geq 2t$ を固定して $n \to \infty$ の状況では $|H| = O(n^{k-t-1})$ である。一方、t 最小次数が $\binom{n-2t}{k-2t}$ 以上の k グラフのサイズは、少なくとも $\binom{n-2t}{k-2t}\binom{n}{t}/\binom{k}{t} = \Omega(n^{k-t})$ である。従って $n \gg k \geq 2t$ のとき t 最小次数が $\binom{n-2t}{k-2t}$ 以上の t 交差族は自明なものに限られる。しかも、自明な t 交差族で t 最小次数が $\binom{n-2t}{k-2t}$ 以上ならば、それはある t 点部分集合を含む k 点部分集合全体でなければならない。そこで n が k に対してどの程度大きければそうなるのかが問題となる。

予想 1. $k \geq 2t$ を固定すると、ある定数 c が存在して以下が成り立つ。$n \geq ck$ で $H \subset \binom{[n]}{k}$ が $\delta_t(H) \geq \binom{n-2t}{k-2t}$ をみたす t 交差族ならば、$H \cong \{x \in \binom{[n]}{k} : [t] \subset x\}$ である。

Huang と Zhao の証明を t 交差族に適用するため、隣接行列 A を Wilson が [7] で定義した擬隣接行列に置き換え、$F := f_2^2 + \cdots + f_{\binom{n}{t}}^2$, $e_* := \binom{n-2t}{k-2t}\binom{n}{t}/\binom{k}{t}$ とおく。さらに記述を簡単にするため $s := \binom{n}{t}/\binom{k}{t} - 1$, $r := \binom{n-t}{t}/\binom{k-t}{t} - 1$ とおく。主張 1 に対応する不等式は次のようになるだろう。

(i') $\binom{n}{k}F \geq \frac{s(r+1)}{r-s}e(e-e_*)$,

(ii') $\binom{n}{k}F \leq \frac{1}{s}\left(\frac{s(r+1)}{r-s}\right)^2 (e-e_*)^2$.

(i') は $t=1$ の場合と同様に証明できる。これと $F \leq e - e^2/\binom{n}{k}$ ((4) 参照) から $e \leq \binom{n-t}{k-t}$ を得る。もしさらに (ii') も成立すれば、(i') と (ii') から $e \geq \binom{n-t}{k-t}$ が従う。つまり $e = \binom{n-t}{k-t}$ でなければならない。このとき t 交差族に関する Erdős–Ko–Rado の定理から予想が正しいことがわかる。つまり (ii') が示せたら予想の証明は完了するのだが、$t=1$ と $t \geq 2$ では次のような違いがある。$t=1$ の場合の (ii) の証明では、異なる u_i たちから得られる内積の値がひとつなので補題 1 が適用できた。一方、一般の t 交差族では内積の値が t 種類あり、補題 1 のような単純な議論は使えない。この状況を処理するには何か新しい工夫が必要だろう。

3.3. **測度版.** k グラフのサイズと集合族の測度の間には、$p = k/n$ を介してしばしばきれいな対応が見られる。実数 $p \in (0,1)$ を固定し、集合族 $H \subset 2^{[n]}$ の測度を

$$\mu(H) := \sum_{x\in H} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|}$$

と定める。このとき Erdős–Ko–Rado の定理の測度版は次の通り：$0 < p < 1/2$ で $H \subset 2^{[n]}$ が交差族ならば、$\mu(H) \leq p$ であり、等号成立は $H \cong H^*$ に限る。ただし、

$$H^* := \{x \subset [n] : 1 \in x\}.$$

ここで $H \subset 2^{[n]}$ に対して、その最小次数の測度版を

$$\delta_p(H) := \min_{i \in [n]} \mu_p(\{x \in H : i \in x\})$$

と定める。例えば $\delta_p(H^*) = p^2$ である。定理 2 の測度版は次の形になるだろう。

予想 2. $0 < p < 1/2$ で $H \subset 2^{[n]}$ が $\delta_p(H) \geq \delta_p(H^*)$ をみたす交差族ならば、$H \cong H^*$ である。

References

[1] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. The complete nontrivial-intersection theorem for systems of finite sets. J. Combinatorial Theory Series A 76 (1996) 121–138.

[2] P. Erdős, C. Ko, R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 12:313–320, 1961.

[3] P. Frankl. On intersecting families of finite sets. J. Combin. Theory Ser. A 24 (1978), 146–161.

[4] P. Frankl. Erdős–Ko–Rado theorem with conditions on the maximal degree. *J. Combin. Theory (A)*, 46 (1987) 252–263.

[5] A.J.W. Hilton, E.C.Milner, Some intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 18:369–384, 1967.

[6] H. Huang, Y. Zhao. Degree versions of the Erdős-Ko-Rado Theorem and Erdős hypergraph matching conjecture. arXiv:1605.07535.

[7] R. M. Wilson. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem. *Combinatorica*, 4:247–257 1984.

琉球大学教育学部 (College of Education, Ryukyu University)

E-mail address: `hide@edu.u-ryukyu.ac.jp` (Norihide Tokushige)