

On higher indicators of a class of noncommutative association schemes

吉川 昌慶

兵庫教育大学

1 序

有限群や Hopf 代数の表現論において、高次 Frobenius-Schur 指標および高次指標が近年盛んに研究されている。Hopf 代数と同じように、群環の一般化であるアソシエーション・スキームの複素隣接代数において、高次指標を考えてみたい。

まずは、有限群の表現論における高次指標を考える [3]。 G を有限群、 $\text{Irr}(G)$ を G の複素既約指標全体の集合とする。このとき、 $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対して、

$$\nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n)$$

を χ の n 次 Frobenius-Schur 指標という。また、 G に対して、

$$\nu_n(G) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \nu_n(\chi)$$

を G の n 次指標という。ここで、 n は任意の自然数である。

有限群の n 次指標について、

$$\nu_n(G) = \#\{g \in G \mid o(g) \mid n\}$$

であることが知られている。ここで、 $o(g)$ は元 g の位数を表す。特に、

1. 任意の自然数 n に対して、 $\nu_n(G) \in \mathbb{Z}$
2. $\{\nu_n(G)\}_{n \geq 1}$ は周期 $\exp(G)$ の周期数列

である。

アソシエーション・スキームにおいて、2次 Frobenius-Schur 指標と2次指標は Higman [2] による先行研究がある。 S をアソシエーション・スキーム、 $\text{Irr}(S)$ を S の複素隣接代数の既約指標全体とする。 Higman は $\chi \in \text{Irr}(S)$ の2次 Frobenius-Schur 指標を

$$\nu_2(\chi) = \frac{m_\chi}{n_S \chi(\sigma_1)} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s} \chi(\sigma_s^2)$$

で定義し、有限群の Frobenius-Schur の定理の類似を示した。さらに、2次指標に関して、

$$\nu_2(S) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(S)} \chi(\sigma_1) \nu_2(\chi) = \#\{s \in S \mid s = s^*\}$$

を示した.

本稿では, 上記の Higman による定義を拡張し, $\chi \in \text{Irr}(S)$ の n 次 Frobenius-Schur 指標を

$$\nu_n(\chi) = \frac{m_\chi}{n_S \chi(\sigma_1)} \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s^{n-1}} \chi(\sigma_s^n),$$

S の n 次指標を

$$\nu_n(S) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(S)} \chi(\sigma_1) \nu_n(\chi)$$

と定義する.

2 準備

アソシエーション・スキームの定義などは, P. -H. Zieschang の本 [6] による.

S をアソシエーション・スキームとする. S の任意の元 s の隣接行列 (adjacency matrix) を σ_s , 分岐指数 (valency) を n_s とする. $n_S := \sum_{s \in S} n_s$ をアソシエーション・スキームの位数 (order) という. アソシエーション・スキーム S の複素数体 \mathbb{C} 上の隣接代数 $\mathbb{C}S$ を $\mathbb{C}S := \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}\sigma_s$ で定義される行列環とする. 複素隣接代数 $\mathbb{C}S$ の既約指標全体の集合を $\text{Irr}(S)$ とする.

複素隣接代数は行列環として定義されているので, 複素隣接代数の元自身を対応させる表現が得られる. その表現の指標を χ_X とかき, 標準指標という. すなわち,

$$\chi_X(\sigma_s) = \begin{cases} n_S & (s = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

である. また, 既約指標 $\chi \in \text{Irr}(S)$ に対して, χ_X における χ の重複度を m_χ とかく.

$$\chi_X = \sum_{\chi \in \text{Irr}(S)} m_\chi \chi.$$

任意の $s, t, u \in S$ に対して, 非負整数 a_{stu} を交叉数 (intersection numbers) とする. 定義から

$$\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} a_{stu} \sigma_u$$

が成り立つ. 3 以上の自然数 n と $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ に対して, 帰納的に

$$a_{s_1 s_2 \dots s_n s} := \sum_{\ell \in S} a_{s_1 s_2 \dots s_{n-1} \ell} a_{\ell s_n s}$$

を定義する. さらに, 任意の $s, \ell, \ell' \in S$ と 2 以上の自然数 n に対して, $a_{s^n \ell} := \underbrace{a_s \dots s}_n \ell$ と $a_{\ell' s^n \ell} := a_{\ell'} \underbrace{s \dots s}_n \ell$ を定義する.

3 高次指標と正則アソシエーション・スキーム

S をアソシエーション・スキームとする. 高次指標の定義より,

$$\nu_n(S) = \sum_{s \in S} \frac{1}{n_s^{n-1}} a_{s^n 1} \in \mathbb{Q}$$

が得られる. ただし, $a_{s^1 1} = \delta_{s,1}$ とする.

例 1. $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を位数 3, ランク 2 のアソシエーション・スキームとする.

このとき, $\nu_1(K_3) = 1, \nu_2(K_3) = 2, \nu_3(K_3) = \frac{3}{2}$ である.

この例からも分かるように, 有限群の高次指標とは違い, アソシエーション・スキームの高次指標はいつも整数とは限らない. したがって, 任意の自然数 n に対して, $\nu_n(S)$ が整数となるアソシエーション・スキームを特徴付けることが自然な問題として得られる. そのようなアソシエーション・スキームとして, 正則アソシエーション・スキーム [4] がある.

定義 2. アソシエーション・スキーム S の元 s が, $s^*ss = \{s\}$ を満たすとき, s は正則であるという. すべての元が正則であるアソシエーション・スキームを正則アソシエーション・スキームとよぶ.

正則アソシエーション・スキームは有限指数であることが知られている. すなわち, 任意の元 $s \in S$ に対して,

$$a_{s^e 1} = n_s^{e-1}$$

を満たす 2 以上の自然数 e が存在する. このような自然数のうち最小のものを $\text{sg}(s)$ とかく. ただし, $\text{sg}(1) = 1$ と定義する.

正則な元に対して, 次が成り立つ.

定理 3. S をアソシエーション・スキーム, $s \in S$ を正則な元とする. このとき,

$$a_{s^{n-1}} = \begin{cases} n_s^{n-1} & (\text{sg}(s) \mid n \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

こうして, 正則アソシエーション・スキームの高次指標について, 有限群の高次指標とはほぼ同様の定理が得られる.

定理 4. S を正則アソシエーション・スキームとする. 任意の自然数 n に対して,

$$\nu_n(S) = \#\{s \in S \mid \text{sg}(s) \mid n\}.$$

特に, S が正則アソシエーション・スキームならば,

1. 任意の自然数 n に対して, $\nu_n(S) \in \mathbb{Z}$
2. $\{\nu_n(S)\}_{n \geq 1}$ は周期数列

である. 一般に, この 2 条件は同値であると筆者は予想している.

予想 5. S をアソシエーション・スキームとする. このとき, 次は同値である.

1. 任意の自然数 n に対して, $\nu_n(S) \in \mathbb{Z}$
2. $\{\nu_n(S)\}_{n \geq 1}$ は周期数列

定理 4 の逆として, 次が成り立つ.

定理 6. S を有限指数のアソシエーション・スキームとする.

$\{\nu_n(S)\}_{n \geq 1}$ が周期数列ならば, S は正則アソシエーション・スキームである.

もし予想 5 が正しければ、この定理より有限指数アソシエーション・スキームに対して、すべての高次指標が整数であるアソシエーション・スキームは正則アソシエーション・スキームと特徴付けられる。

4 ある非可換アソシエーション・スキームの構成とその高次指標

花木-宮本のアソシエーション・スキームの分類 [1] を用いると、位数 30 以下には

$$\nu_n(S) \in \mathbb{Z} \text{ for } 1 \leq n \leq |S|^2$$

を満たす 40 個の非正則アソシエーション・スキームが存在する。このようなアソシエーション・スキームのなかで最小位数をもつものは *as12*[49] で、次の関係行列をもつ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 5 & 4 & 7 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 2 & 3 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 7 & 7 & 6 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 4 & 7 & 7 & 6 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = \text{as12}[49]$ とする。 S の高次指標は

$$\nu_n(S) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 1 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ 4 & (n \equiv 2 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ 3 & (n \equiv 3 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ 4 & (n \equiv 4 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ 1 & (n \equiv 5 \pmod{6} \text{ のとき}) \\ 6 & (n \equiv 0 \pmod{6} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。 $\{\nu_n(S)\}_{n \geq 1}$ は周期数列であるが、 S は非正則であるので、定理 6 の仮定にある有限指数をとることはできないことがこの例から分かる。

S の構造を模して、3 次以上の巡回群から非可換アソシエーション・スキームを構成する方法を考える。まず、 S は次の 9 個の行列から構成することができる。

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

S の 8 個の隣接行列は上の行列を用いると

$$G^3 \otimes I, G^3 \otimes X, G^3 \otimes Y, G^3 \otimes Z, G \otimes A, G \otimes B, G^{-1} \otimes C, G^{-1} \otimes D$$

と表される. ここで, \otimes はクロネッカー積を意味する.

一般の巡回群に拡張するため, m 次正方行列 G_m を

$$G_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とし, m 次単位行列を I_m とする. また, 2 次正方行列で, すべての要素が 1 である行列を J とする.

定理 7. 行列 $I, X, Y, Z, A, B, C, D, G_m, I_m, J$ を上のおりとする. このとき,

$$I_m \otimes I, I_m \otimes X, I_m \otimes Y, I_m \otimes Z, G_m \otimes A, G_m \otimes B, G_m^{-1} \otimes C, G_m^{-1} \otimes D, G_m^j \otimes J (2 \leq j \leq m-2)$$

を隣接行列とする非可換アソシエーション・スキーム T が存在する. さらに,

1. 任意の自然数 n に対して, $\nu_n(T) \in \mathbb{Z}$
2. $\{\nu_n(T)\}_{n \geq 1}$ は周期数列

が成り立つ.

ここでは, クライン群 $C_2 \times C_2 = \{I, X, Y, Z\}$ と巡回群 $C_m = \langle G_m \rangle$ を用いて非可換アソシエーション・スキームを構成したが, より一般に同位数の巡回群の直積 $C_m \times C_m$ と対称でない thin な元をもつアソシエーション・スキーム S に対して, 非可換アソシエーション・スキームを類似の方法で構成することができる [5]. 特に, S が正則アソシエーション・スキームであるならば, 得られた非可換アソシエーション・スキーム T は正則ではないが

1. 任意の自然数 n に対して, $\nu_n(T) \in \mathbb{Z}$
2. $\{\nu_n(T)\}_{n \geq 1}$ は周期数列

を満たすことが分かる.

参考文献

- [1] A. Hanaki and I. Miyamoto, The classification of association schemes with small vartices, <http://math.shinshu-u.ac.jp/hanaki/as/>.
- [2] D. G. Higman, Coherent configurations. I. Part I: Ordinary representation theory, *Geom. Dedicata* **4**, 1-32 (1975).
- [3] I. M. Isaacs, "Character Theory of Finite Groups", Academic Press, New York, 1976.
- [4] M. Yoshikawa, On association schemes of finite exponent, *European J. Combin.* **51**, 433-442 (2016).
- [5] M. Yoshikawa, A construction of a class of noncommutative association schemes, in preparation.

- [6] P. -H. Zieschang, “Theory of Association schemes”, Springer Monographs in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, 2005.