$\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

京都大学・数理解析研究所　元良 直輝 *

Naoki Genra
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1　はじめに

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素 Lie 代数, または basic classical な Lie 超代数とする. このとき $\mathfrak{g}$ は even な非退化超対称不変双線形形式をもつ. $f \in \mathfrak{g}$ を even なべき零元, k を複素数, Γ を $\mathfrak{g}$ の半整数次数付け

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

であって, $f \in \mathfrak{g}_{-1}$ かつ $\mathrm{ad} f : \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-1}$ が $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射, $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射となるようなものとする. このとき $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$ に付随する $\mathcal{W}$ 代数

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$$

が一般化された量子 Drinfeld-Sokolov 還元によって定義される ([KRW]). $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は一般に非負半整数次数付けされた頂点超代数になる. この頂点超代数構造は, Γ のとり方によらずに定まることが知られている. 本稿では, $\mathcal{W}$ 代数をスクリーニング作用素と呼ばれる作用素の核の共通部分として表現し (定理 3.2, 定理 3.3), それを応用して二つの予想 (定理 4.1, 定理 4.2) を証明する.

2　$\mathcal{W}$ 代数

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_0$ に含まれる Cartan 部分代数, Δ を $\mathfrak{g}$ のルートの集合, Π を単純ルートであって, $\mathfrak{g}_{>0}$ が正ルートベクトル空間に含まれるように定める. このときルートにはルートベクトルの次数によって自然に次数付けが定まり, それを $\Delta = \bigsqcup_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \Delta_j$ とする.

$V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k のアファイン頂点超代数（affine vertex superalgebra）, $F_{\mathrm{ch}}(\mathfrak{g}_{>0})$ を $\mathfrak{g}_{>0}$ に付随するチャージフェルミオン頂点超代数（charged fermion vertex superalgebra）, $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ に付随する中立フェルミオン頂点超代数（neutral fermion vertex superalgebra）とする. $V^k(\mathfrak{g})$ を生成する場を $u(z)$ (ただし $u \in \mathfrak{g}$), $F_{\mathrm{ch}}(\mathfrak{g}_{>0})$ を生成する場を $\varphi_\alpha(z), \varphi_\alpha(z)$ (ただし $\alpha \in \Delta_{>0}$), $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ を生成する場を $\Phi_\alpha(z)$ (ただし $\alpha \in \Delta_{\frac{1}{2}}$) とする. これらの間の 0 でない OPE は

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u,v](w)}{z-w} + \frac{k(u|v)}{(z-w)^2}, \quad \varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w) \sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \quad \Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w) \sim \frac{(f|[e_\alpha, e_\beta])}{z-w}$$

*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

となる (ただし $(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ 上の正規化された不変双線形形式とする). ここで

$$C_k = V^k(\mathfrak{g}) \otimes F_{\mathrm{ch}}(\mathfrak{g}_{>0}) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$$

とおく. $F_{\mathrm{ch}}(\mathfrak{g}_{>0})$ に対し $\varphi_\alpha(z)$ は -1, $\varphi^\alpha(z)$ は $+1$ なる次数付けを与えることで, C_k にも次数が誘導される (これを電荷 (charge) という). 一方で C_k 上の場 $d(z)$ を

$$d(z) = d_{\mathrm{st}}(z) + d_f(z) + d_{\mathrm{ne}}(z)$$

で定める. ただし

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{st}}(z) &= \sum_{\alpha\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}} : e_\alpha(z)\varphi^\alpha(z) : -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} c_{\alpha,\beta}^{\gamma} : \varphi_\gamma(z)\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(z) :, \\
d_f(z) &= \sum_{\alpha\in\Delta_{>0}} (f|e_\alpha)\varphi^\alpha(z), \\
d_{\mathrm{ne}}(z) &= \sum_{\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}}} : \varphi^\alpha(z)\Phi_\alpha(z) :
\end{aligned}$$

であって, $e_\alpha \in \mathfrak{g}$ はルートベクトル, $c_{\alpha,\beta}^{\gamma} \in \mathbb{C}$ は構造定数, $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は α のパリティとする.

$$d = \int d(z)\ dz = d_{(-1)}$$

とすれば, $d^2 = 0$ であり, d は C_k の電荷を一つ増やす. したがって (C_k, d) は複体となり,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H(C_k, d)$$

で定められる. 実際には, 0 でない整数 n に対して, $H^n(C_k, d) = 0$ となるので, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) = H^0(C_k, d)$ である.

3 主定理

$u \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$J^u(z) = u(z) + \sum_{\alpha,\beta\in\Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}} c_{u,\beta}^{\alpha} : \varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(z) :$$

とおく. また C_+ を $J^u(z)$ (ただし $u \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$), $\varphi^\alpha(z), \Phi_\alpha(z)$ で生成される頂点超代数, C_- を $J^u(z)$ (ただし $u \in \mathfrak{g}_{>0}$), $\varphi_\alpha(z)$ によって生成される頂点超代数とすると, C_k は PBW 型の基底をもつことからベクトル空間として

$$C_k \simeq C_+ \otimes C_-$$

が成り立つ. さらに C_+, C_- は d の作用で閉じており, しかも

$$H(C_-, d) = \mathbb{C}.$$

したがって

$$H(C_k, d) = H(C_+, d) \otimes H(C_-, d) = H(C_+, d)$$

となる ([KW]). C_+ に $\deg J^u = 2j$ (ただし $u \in \mathfrak{g}_{-j}$), $\deg \varphi^\alpha = 2j$ (ただし $\alpha \in \Delta_j$), $\deg \Phi_\alpha = 0$, $\deg \partial A = \deg A$, $\deg : AB := \deg A + \deg B$ (ただし $A, B \in C_+$) によって定まる次数付けを与えると, d はこの次数を保ち, C_+ に複体のフィルトレーションが入る. このフィルトレーションに付随するスペクトラル系列 E_n をとると, これは収束し,

$$E_1 = H(C_+, d_{\rm st}) = H(C'_+, d_{\rm st}) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$$

が成り立つ. ただし C'_+ とは $J^u(z)$ $(u \in \mathfrak{g}_{\leq 0})$ と $\varphi^\alpha(z)$ によって生成された C_+ の頂点部分代数である.

$u, v \in \mathfrak{g}_0$ に対し,

$$J^u(z)J^v(w) \sim \frac{J^{[u,v]}(w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

が成り立つ. ただし

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

であり, $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式を表す.

定義 3.1. $k \in \mathbb{C}$ が generic とは,

$$H(C'_+, d_{\rm st}) \simeq V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$$

が成り立つこと. ただし $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ とは $J^u(z)$ $(u \in \mathfrak{g}_0)$ で生成された頂点超代数, $H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$ は自明表現に係数をもつ Chevalley の $\mathfrak{g}_{>0}$ 加群コホモロジーである.

generic な k 全体の集合は, $\mathbb{C}$ で Zariski 位相で稠密であることが証明できる. $H^0(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ に注意すると, この同型を通じて $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$ に $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を部分代数として含むような頂点超代数構造を自然に入れることが出来る.

$$H^1(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\alpha \in \Pi^\Gamma} \mathbb{C}\psi_\alpha$$

とする $(\Pi^\Gamma \subset \Delta_{>0})$. $\alpha \in \Pi^\Gamma$ に対し, $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$ 上の場 $S^\alpha(z)$ を

$$S^\alpha(z) = Y(\psi_\alpha, z)$$

と定義する. ただし Y は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$ の頂点作用素である. $S^\alpha(z)$ の各係数は定義から, $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ から $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H^1(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C})$ への作用を定める.

k を generic とすると,

$$E_1 \simeq V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes H(\mathfrak{g}_{>0}, \mathbb{C}) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}).$$

ここで E_1 上の場 $Q(z)$ を

$$Q(z) = \sum_{\alpha \in \Pi_1^\Gamma} (f|e_\alpha) S^\alpha(z) + \sum_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma} :S^\alpha(z)\Phi_\alpha(z):$$

と定めると $(d_f(z) + d_{\rm ne}(z)$ の類似に注意する),

$$Q = \int Q(z)\ dz = Q_{(-1)}$$

とすれば, $Q^2=0$ かつ Q は E_1 の複体としての微分となっている. さらに

$$E_\infty \simeq H(E_1, Q)$$

が成り立つことも分かる. $E_\infty \simeq \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ であり, 0 次のコホモロジー以外は残らないので,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq H^0(E_1, Q) = \mathrm{Ker} Q$$

となる. $\alpha \in \Pi^\Gamma$ に対し,

$$[\alpha] = (\alpha + \bigoplus_{\beta\in\Pi_0} \mathbb{Z}\beta) \cap \Pi^\Gamma, \quad [\Pi^\Gamma] = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Pi^\Gamma\}$$

とする. $[\alpha]$ の元は α と同じ次数をもつ. $[\alpha] \in [\Pi^\Gamma]$ に対し,

$$Q_{[\alpha]} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\beta\in[\alpha]} (f|e_\beta) \int S^\beta(z)\, dz & (\alpha \in \Pi_1^\Gamma \text{のとき}), \\ \displaystyle\sum_{\beta\in[\alpha]} \int :S^\beta(z)\Phi_\beta(z):dz & (\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma \text{のとき}). \end{cases}$$

とする ($\Pi^\Gamma = \Pi_1^\Gamma \sqcup \Pi_{\frac{1}{2}}^\Gamma$ に注意する).

定理 3.2. k が generic のとき, $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{[\alpha]\in\Pi^\Gamma} \mathrm{Ker}\ Q_{[\alpha]}.$$

このとき, $Q_{[\alpha]}$ をスクリーニング作用素と呼ぶ. 定理 3.2 は $\mathcal{W}$ 代数のスクリーニング作用素による実現を与えている.

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ のとき, $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) = V^{\tau_k}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ に同型になる. またこの同一視の下で

$$S^\alpha(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int \alpha(z)}$$

となる. ただし $\nu = \sqrt{k+h^\vee}$ である. さらに $\Pi^\Gamma = \Pi$ となり, $[\alpha] = \{\alpha\}$ となる.

定理 3.3. k が generic かつ $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ とする. このとき $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ は $\mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha\in\Pi_1 \\ (f|e_\alpha)\neq 0}} \mathrm{Ker} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha(z)}\, dz \ \cap \bigcap_{\alpha\in\Pi_{\frac{1}{2}}} \mathrm{Ker} \int :\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha(z)}\Phi_\alpha(z):dz.$$

定理 3.3 によって, ($\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ の仮定の下で) スクリーニング作用素による $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を与えることが出来た. 特に $\mathfrak{g}$ が Lie 代数かつ f が正則べき零元のとき, 常に $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ となり, これは Feigin-Frenkel([FF]) の結果を復元する (実際, 証明のアイデアのほとんどが彼らの方針に寄っている).

4　応用

$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$, $f = f_{reg}$ を (even part の) 正則べき零元とすると $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ なる Γ が存在し, 定理 3.3 が適用できる．このとき定理 3.3 で与えられた同型の右辺は Fateev-Lukyanov([FL]) が定義した $\mathcal{W}B_n^k$ 代数に一致する．このままだと k が generic でしか成り立たないが, 三浦写像を用いることで $k \neq -h^\vee = -n - \frac{1}{2}$ の場合にまで拡張できる (ここでは詳細は省く).

定理 4.1. $k \neq -n - \frac{1}{2}$ のとき,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}(1, 2n), f_{reg}; \Gamma) \simeq \mathcal{W}B_n^k.$$

定理 4.1 は, $n = 1$ の場合に $\mathcal{W}B_1^k$ が Virasoro 超代数に一致することから, Kac-Roan-Wakimoto ([KRW]) によって証明されていたが, 一般の n に対しては予想とされていた (物理学者の間では良く知られていた).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $f = f_{sub}$ を副正則べき零元とする．このとき定理 3.2 を用いることで (若干の議論が必要となるが) 定理 3.2 で与えられた同型の右辺が, Feigin-Semikhatov([FS]) の定義した $\mathcal{W}_n^{(2),k}$ 代数に一致することが証明できる．再び三浦写像を用いることで, $k \neq -h^\vee = -n$ までこの結果は拡張される (詳細は略).

定理 4.2. $k \neq -n$ のとき,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{sub}; \Gamma) \simeq \mathcal{W}_n^{(2),k}.$$

定理 4.2 は, $n = 2$ の場合には $\mathcal{W}_2^{(2),k} = V^k(\mathfrak{sl}_2)$, $n = 3$ の場合には $\mathcal{W}_3^{(2),k}$ が Bershadsky-Polyakov 代数に一致することからよく知られてされていたが, 一般の n に対しては予想とされていた ([ACGHR]).

参考文献

[ACGHR] H. R. Afshar, T. Creutzig, D. Grumiller, Y. Hikida, P. B. Rønne. Unitary W-algebras and three-dimensional higher spin gravities with spin one symmetry. *J. High Energy Phys.*, (6), 063, 2014.

[FL] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov. Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional conformal field theory. *Sov. Sci. Rev. A. Phys.*, 15:1–117, 1990.

[FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.

[FS] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov. $\mathcal{W}_n^{(2)}$-algebras. *Nuclear Phys., B* 698(3):409–449, 2004.

[G] N. Genra. Screening operators for $\mathcal{W}$-algebras. arXiv:1606.00966.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[KW] V. G. Kac, M. Wakimoto. Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras. *Adv. Math.*, 185(2):400–458, 2004.