有限グラフ上の四元数重み付きゼータ関数と四元数行列式

三橋秀生（宇都宮大教育）
今野紀雄（横浜国立大理工）
佐藤巖　（小山工高専一般）

1　はじめに

グラフのゼータ関数は，伊原 [2] により定義された伊原ゼータ関数が起源である．伊原ゼータ関数は，$SL(2, \mathbb{Q}_p)$ の離散部分群 Γ から定まるセルバーグゼータ関数の類似と見ることができ，母関数型表示と行列式表示を持つことが [2] において示された．その後 Serre[5] により，伊原ゼータ関数は，$SL(2, \mathbb{Q}_p)$ に付随した 1 次元 Bruhat-Tits building（無限正則木）の Γ による商グラフ（有限正則グラフ）のゼータ関数であることが指摘され，砂田，小谷，橋本，Bass，Stark，Terras，Foata，Zeilberger，水野，佐藤等の貢献により，グラフのゼータ関数の大きな発展へとつながった．我々は，四元数を重みにもつグラフのゼータ関数（以降，四元数重み付きゼータ関数と呼ぶ）を定義し，その四元数行列式（Study 行列式）表示や母関数型表示を得た [3]．本稿ではその概要について述べるとともに，四元数重み付きゼータ関数についての考察を行う．

2　有限グラフの伊原ゼータ関数

$G = (V, E)$ を有限単純連結グラフとし，$|V| = n$, $|E| = m$ とする．$uv \in E$ に対し，有向辺を (u, v) で表し，$D(G) = \{(u, v), (v, u) \,|\, uv \in E\}$ とする．$D(G)$ の元を arc と呼ぶ．$e = (u, v)$ に対し $e^{-1} = (v, u)$ と表すことにする．また，$u \in V$ に対し，d_u を u の次数とし，$e = (u, v) \in D(G)$ に対し，$o(e) = u$ を e の始点，$t(e) = v$ を e の終点とする．G における長さ ℓ の path とは，arc の列 $P = (e_1, \ldots, e_\ell)$ で $t(e_r) = o(e_{r+1})$（$r \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$）を満たすものとし，$|P| = \ell$ と表す．さらに，$t(e_\ell) = o(e_1)$ であるような P をサイクルと呼ぶ．サイクル $C = (e_1, \ldots, e_\ell)$ の s 乗 C^s とは，C と同じ向きに同じ始点から s 周して得られるサイクルのこととし，C の backtracking とは $e_{r+1} = e_r^{-1}$ となる部分のこととする．C は，C, C^2 がともに backtracking を持たないとき reduced であるといい，$C = B^s$（$s > 1$）となるサイクル B が存在しないとき prime であるという．2 つのサイクル $C_1 = (e_1, \ldots, e_\ell)$, $C_2 = (f_1, \ldots, f_\ell)$ は，ある整数 k に対し $f_r = e_{r+k}$（$r \in \{1, \ldots, \ell\}$，但し添え字は ℓ を法とした剰余類で扱う）が成り立つとき巡回同値であるといい，C の属する巡回同値類を $[C]$ と表す．このとき，G の伊原ゼータ関数 $\mathbf{Z}(G, t)$ は次式で定義される：

$$\mathbf{Z}(G, t) = \prod_{[C]} (1 - t^{|C|})^{-1}. \tag{1}$$

但し，$\prod_{[C]}$ は prime reduced cycles の巡回同値類をわたるものとし，$|t|$ は十分小さい複素数とする．G が正則グラフの場合，隣接行列を用いた行列式表示や母関数型表示が伊原により得られ，その後多くの研究者により一般の場合に拡張された．

3 有限グラフの重み付きゼータ関数

$D(G)$ の各元に番号を添字付けて $e_1, e_2, \ldots, e_{2m}$ と表し，各 $e_r \in D(G)$ に重みと呼ばれる複素数 $w_r = w(e_r)$ を付与する．$2m \times 2m$ 行列 $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ef})_{e,f \in D(G)}$, $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_{ef})_{e,f \in D(G)}$, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_{ef})_{e,f \in D(G)}$ を次式で定める：

$$\mathbf{B}_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } t(e) = o(f), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \mathbf{J}_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{if } f = e^{-1}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \mathbf{U}_{ef} = \begin{cases} w(e) & \text{if } f = e, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$\mathbf{B} - \mathbf{J}_0$ を G の edge matrix という．このとき，$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{2m})$ を変数とする G の辺ゼータ関数 $\zeta_G(\mathbf{w})$ は次式で定義される：

$$\zeta_G(\mathbf{w}) = \prod_{[C]} (1 - w(C))^{-1}.$$

但し，$C = (e_{r_1}, \ldots, e_{r_\ell})$ に対し $w(C) = w(e_{r_1}) \cdots w(e_{r_\ell}) = w_{r_1} \cdots w_{r_\ell}$ とし，これを C のノルムと呼ぶことにする．Stark and Terras[6] は辺ゼータ関数の edge matrix を用いた次の行列式表示を求めた：

定理 1 (Stark and Terras[6])**.**

$$\zeta_G(\mathbf{w})^{-1} = \det(\mathbf{I}_{2m} - (\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)\mathbf{U}) = \det(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{U}(\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)).$$

$n \times n$ 行列 $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_{uv})_{u,v \in V}$ を

$$\mathbf{W}_{uv} = \begin{cases} w(u,v) = w(e) & \text{if } (u,v) = e \in D(G), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

で定める．$\mathbf{W}$ を G の重み行列という．水野-佐藤は辺ゼータ関数の別の形として，(第 1 種）重み付きゼータ関数 $\mathbf{Z}(G, w, t)$ を以下で定義した：

$$\mathbf{Z}(G, w, t) = \prod_{[C]} (1 - w(C) t^{|C|})^{-1}. \tag{2}$$

$w(e) = 1$（$^{\forall} e \in D(G)$）ならば，$\mathbf{Z}(G, w, t) = \mathbf{Z}(G, t)$ であるから重み付きゼータ関数 (2) は伊原ゼータ関数 (1) の一般化と見なせる．水野-佐藤による重み付きゼータ関数の重み行列を用いた行列式表示に関する結果は次のとおりである：

定理 2 (水野-佐藤 [4])**.** $w(e^{-1}) = w(e)^{-1}$ であるとき以下の等式が成り立つ：

$$\mathbf{Z}(G, w, t)^{-1} = (1 - t^2)^{m-n} \det(\mathbf{I}_n - t\mathbf{W} + t^2(\mathbf{D} - \mathbf{I}_n)).$$

但し，$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{uv})_{u,v \in V(G)}$ は $\mathbf{D}_{uu} = d_u$ で与えられる対角行列とする．

一般の場合は重み行列等を修正する形で渡辺-福水により得られた：

定理 3 (渡辺-福水 [7]). $e_{r+m} = e_r^{-1}$（$r = 1, \ldots, m$）となるように番号付けするとき

$$\zeta_G(\mathbf{w})^{-1} = \det(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{W}}) \prod_{r=1}^{m} (1 - w(e_r) w(e_r^{-1})),$$

但し $\hat{\mathbf{W}} = (\hat{\mathbf{W}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$, $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{D}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$ は以下で定める $n \times n$ 行列である：

$$\hat{\mathbf{W}}_{uv} = \begin{cases} \dfrac{w(u,v)}{1 - w(u,v)w(v,u)} & \textit{if } (u,v) \in D(G), \\ 0 & \textit{otherwise,} \end{cases} \quad \hat{\mathbf{D}}_{uv} = \delta_{uv} \sum_{\substack{e \in D(G) \\ o(e) = u}} \frac{w(e)w(e^{-1})}{1 - w(e)w(e^{-1})}.$$

ここで δ_{uv} はクロネッカーのデルタとする.

4　四元数行列式

本節では四元数を成分に持つ行列（四元数行列）の行列式（四元数行列式）について概説する．四元数行列式の詳細については [1] を参照されたい．四元数行列式を定める試みは，19 世紀中ごろより多くの数学者により行われてきた．ここでは，Study が与えた四元数行列式（Study 行列式ということにする）および斜体を成分にもつ行列に対して Dieudonné が与えた Dieudonné 行列式についての要点を述べる．四元数体 $\mathbb{H}$ は Hamilton が発見した実 4 次元ベクトル空間で，$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ を満たす 3 つの元 i, j, k および 1 が基底を成す．$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}$ に対し，$|q| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ を q のノルムといい，$q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ を q の（四元数）共役という．通常の行列式からの類推により，N 次正方四元数行列全体からなる集合 $\mathrm{Mat}(N, \mathbb{H})$ から $\mathbb{H}$ への写像 $d : \mathrm{Mat}(N, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{H}$ で次の性質を満たすものをここでは四元数行列式と呼ぶことにする [1]：

(A1) $d(\mathbf{M}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}$ は特異行列.

(A2) $d(\mathbf{MM}) = d(\mathbf{M})d(\mathbf{N})$.

(A3) $d((\mathbf{I_N} + q\mathbf{E_{rs}})\mathbf{M}) = d(\mathbf{M}(\mathbf{I_N} + q\mathbf{E_{rs}})) = d(\mathbf{M})$.

但し，$\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{H})$，$\mathbf{I_N}$ は N 次単位行列，$\mathbf{E_{rs}}$ は行列単位で $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$，$q \in \mathbb{H}$ とする．一般に，N 次正方四元数行列 $\mathbf{M} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{H})$ は二つの複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を用いて，$\mathbf{M} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$ と一意に表すことができ，$\psi : \mathrm{Mat}(N, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(2N, \mathbb{C})$ を

$$\psi(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\overline{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{A}} \end{bmatrix}$$

で定めれば，ψ は単射 $\mathbb{R}$ 代数準同型である．このとき Study 行列式は次式で定義される：

$$\mathrm{Sdet}(\mathbf{M}) = \det(\psi(\mathbf{M})).$$

Sdet は (A1),(A2),(A3) を満たし，常に非負実数値をとる汎関数である事が知られている．また，定義から Sdet は行や列の入れ替えで不変であることや，$\mathbf{M} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ のときは $\mathrm{Sdet}(\mathbf{M}) = |\det(\mathbf{M})|^2$ であることがわかる.

一方，Dieudonné 行列式は一般の斜体上で定義される．$\mathbb{K}$ を斜体とし，

$$GL(N,\mathbb{K}) = \{\, \mathbf{M} \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{K}) \mid \mathbf{M} \text{ は正則} \,\},$$
$$SL(N,\mathbb{K}) = \langle\, \mathbf{B_{ij}}(a) = \mathbf{I_N} + a\mathbf{E_{ij}} \mid \mathbf{i} \neq \mathbf{j},\, a \in \mathbb{K} \,\rangle,$$

とするとき，次が成り立つ．

補題 4. 任意の $\mathbf{M} \in GL(N,\mathbb{K})$ に対し，$\mathbf{M} = \mathbf{N}\begin{pmatrix} \mathbf{I_{N-1}} & \mathbf{O_{N-1,1}} \\ \mathbf{O_{1,N-1}} & \mu \end{pmatrix} = \mathbf{ND}(\mu)$ となるような $\mathbf{N} \in SL(N,\mathbb{K})$, および $\mu \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ が存在する．

これにより，写像 $\pi : GL(N,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*/[\mathbb{K}^*,\mathbb{K}^*]$, $\mathbf{M} = \mathbf{ND}(\mu) \mapsto \mu[\mathbb{K}^*,\mathbb{K}^*]$ が定まり，π は全射群準同型となる．さらに，$\ker \pi = SL(N,\mathbb{K})$ であることから，群同型

$$GL(N,\mathbb{K})/SL(N,\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*/[\mathbb{K}^*,\mathbb{K}^*],$$

を得る．これらの結果に基づき Dieudonné 行列式 ddet は次式で定義される：

$$\mathrm{ddet} : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{K}^*/[\mathbb{K}^*,\mathbb{K}^*] \cup \{0\},$$
$$\mathrm{ddet}(\mathbf{M}) = \begin{cases} \mu[\mathbb{K}^*,\mathbb{K}^*] & (\mathbf{M} = \mathbf{ND}(\mu) \text{ が正則の場合}), \\ 0 & (\mathbf{M} \text{ が特異の場合}). \end{cases}$$

さらに $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ の場合は，$SL(N,\mathbb{H}) = [GL(N,\mathbb{H}), GL(N,\mathbb{H})]$ であるという事実と，$[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*]$ がノルム 1 の四元数全体のなす乗法群に同型であるという事実から

$$GL(N,\mathbb{H})/[GL(N,\mathbb{H}), GL(N,\mathbb{H})] \cong \mathbb{H}^*/[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*] \cong \mathbb{R}_{>0},$$

が従う．これより，正規化された Dieudonné 行列式 Ddet が次式で定まる：

$$\mathrm{Ddet}(\mathbf{M}) = \omega(\mathrm{ddet}(\mathbf{M})).$$

但し，ω は $\omega : \mathbb{H}^*/[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$, $x[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*] \mapsto |x|$, $\omega(0) = 0$ で定めるものとする．Ddet は (A1),(A2),(A3) を満たし，Study 行列式とは $\mathrm{Ddet}^2 = \mathrm{Sdet}$ という関係にあることが知られている．

5　有限グラフの四元数重み付きゼータ関数

本節では四元数重み付きゼータ関数に関する我々の結果を概説する．3 節における重み $w(e)$ が四元数の場合を考える．重みが非可換だから，巡回同値なサイクル同士でもノルムは一般には異なる．そこで，$[C]$ の特別な代表元を次のように指定する．まず，$D(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{2m}\}$ と表し，$[2m] = \{1, 2, \ldots, 2m\}$ をアルファベットとする語（word）を元とし，辞書式順序をもつ全順序集合を $[2m]^*$ とする．空でない word $\alpha = r_1 r_2 \cdots r_\ell \in [2m]^*$ は，$\alpha = \beta\beta\cdots\beta$ となる他の word $\beta \in [2m]^*$ を持たず，かつ α を構成するアルファベットを巡回させて得られる word の中で最小であるとき Lyndon word という．例えば，$X = \{1, 2, 3, 4\}$ を自然な順序集合とすると，

$1, 12, 123, 23234$ は Lyndon word だが $21, 121, 134134, 13212$ は Lyndon word ではない．$[2m]^*$ に属する Lyndon word 全体の集合を $L_{[2m]}$ とする．$\mathbb{H}[[x]]$ を可換不定元 x の $\mathbb{H}$ 係数形式的べき級数環とし，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) \in \mathbb{H}[[x]]$ を以下で定義する [3]：

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \prod_{C} \left\{ (1 - w(C)x^{|C|})(1 - w(C)x^{|C|})^* \right\}^{-1}. \tag{3}$$

但し，$\prod_C$ は $r_1 \cdots r_\ell \in L_{[2m]}$ を満たす reduced cycle $C = e_{r_1} \cdots e_{r_\ell}$ をわたる積で，これは因子 $\{(1-w(C)x^{|C|})(1-w(C)x^{|C|})^*\}^{-1}$ の積の順序によらず定まることに注意する．また，$(1-w(C)x^{|C|})^{-1} = 1 + w(C)x^{|C|} + (w(C)x^{|C|})^2 + \cdots$ であり，共役 * は $\mathbb{H}[[x]]$ 上に自然に拡張する．$(1-w(C)x^{|C|})(1-w(C)x^{|C|})^* = 1 - 2\mathrm{Re}(w(C))x^{|C|} + |w(C)|^2 x^{2|C|}$ であることから，実際には $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) \in \mathbb{R}[[x]]$ である．$w(e) = 1$（$^\forall e \in D(G)$）ならば，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \mathbf{Z}(G, x)^2$ であるから $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ は伊原ゼータ関数 (1) の 2 乗の一般化と見なせる．Sdet_x を Sdet の $\mathbb{H}[[x]]$ への自然な拡張とするとき，我々は次に示す通り，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ の母関数型表示と，2 種類の Study 行列式表示を決定した．

定理 5 (今野-三橋-佐藤 [3])**.** (i) 母関数型表示

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x) = \left\{ \exp\left(\sum_{s \geq 1} \sum_{C} \frac{\mathrm{Re}(w(C)^s)}{s} x^{s|C|} \right) \right\}^2.$$

但し，$\sum_C$ は $r_1 \cdots r_\ell \in L_{[2m]}$ を満たす reduced cycle $C = e_{r_1} \cdots e_{r_\ell}$ をわたる和とする．
(ii) Edge matrix による Study 行列式表示

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)^{-1} = \mathrm{Sdet}_x(\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{U}(\mathbf{B} - \mathbf{J}_0)x).$$

(iii)（修正された）重み行列による Study 行列式表示
$e_{r+m} = e_r^{-1}$（$r = 1, \ldots, m$）となるように番号付けするとき次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)^{-1} \\ &= \mathrm{Sdet}_x(\mathbf{I}_n - x\tilde{\mathbf{W}} + x^2\tilde{\mathbf{D}}) \prod_{r=1}^{m} (1 - w(e_r)w(e_r^{-1})x^2)(1 - w(e_r)w(e_r^{-1})x^2)^*. \end{aligned}$$

但し $\tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{\mathbf{W}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$, $\tilde{\mathbf{D}} = (\tilde{\mathbf{D}}_{uv})_{u,v \in V(G)}$ は以下で定まる $n \times n$ 行列である：

$$\tilde{\mathbf{W}}_{uv} = \begin{cases} (1 - w(e)w(e^{-1})x^2)^{-1} w(e) & \textit{if } e = (u, v) \in D(G), \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases}$$
$$\tilde{\mathbf{D}}_{uv} = \delta_{uv} \sum_{\substack{e \in D(G) \\ o(e) = u}} (1 - w(e)w(e^{-1})x^2)^{-1} w(e)w(e^{-1}).$$

6　四元数重み付きゼータ関数に関する考察

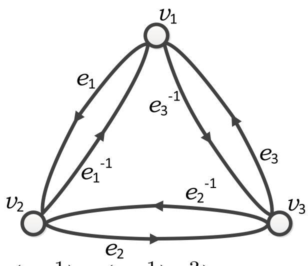
本節では，四元数重み付きゼータ関数 $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G, w, x)$ に関する考察を例を交えながら行う．複素数の場合の重み付きゼータ関数 (2) からの類推という観点に立てば，次

の無限積を四元数重み付きゼータ関数とした方が自然に見えるかもしれない：

$$\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w,x)=\prod_{C}^{>}(1-w(C)x^{|C|})^{-1},$$

但し，C は $i_1 i_2 \cdots i_r \in L_{[2m]}$ であるようなすべての reduced cycles $C=(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_r})$ をわたり，積の順序は $L_{[2m]}$ において降順にとるものとする．しかし，四元数行列式に関する次の事実より，四元数行列式表示の観点からは $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ の方がより自然であることが以下のようにして分かる．

定理 6. $d:\mathrm{Mat}(n,\mathbb{H})\to\mathbb{H}$ *satisfies* (A1),(A2),(A3) $\Rightarrow d(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{H}))$ *is a commutative subset of* $\mathbb{H}$.



今，$G=K_3$ とし，$V(G)=\{v_1,\,v_2,\,v_3\}$，$E(G)=\{v_1v_2,\,v_2v_3,\,v_3v_1\}$，$D(G)=\{e_1=(v_1,v_2),\,e_2=(v_2,v_3),\,e_3=(v_3,v_1),\,e_4=e_1^{-1},\,e_5=e_2^{-1},\,e_6=e_3^{-1}\}$ とおく．このとき，

$$\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w,x)^{-1}=(1-w(e_1)w(e_2)w(e_3)x^3)(1-w(e_1^{-1})w(e_3^{-1})w(e_2^{-1})x^3)$$

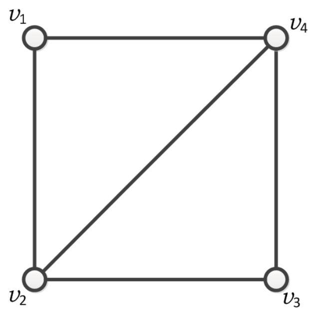
である．四元数重み $w_1,\,w_2$ をそれぞれ
$w_1(e_1)=i,\,w_1(e_4)=w_1(e_1^{-1})=j$ and $w_1(e_r)=1\ (r\neq 1,4)$
$w_2(e_1)=j,\,w_2(e_4)=w_2(e_1^{-1})=i$ and $w_2(e_r)=1\ (r\neq 1,4)$
とおくと，$\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_1,1)^{-1}=1-i-j+k$，$\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_2,1)^{-1}=1-i-j-k$ を得る．これより直ちに

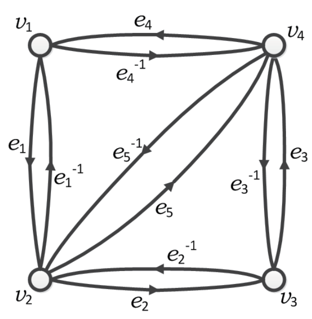
$$\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_1,1)^{-1}\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_2,1)^{-1}\neq\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_2,1)^{-1}\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w_1,1)^{-1}$$

が従うため，定理 6 から $\mathbf{Z}'_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ は (A1),(A2),(A3) を満たす四元数行列式による表示を持たないことがわかる．一方，Theorem 5 で得られたように $\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ は四元数行列式による表示を持ち，その形は Theorem 1, 2, 3 で述べた複素数の場合の重み付きゼータ関数の行列式表示によく似ている．それゆえ，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ をグラフの重み付きゼータ関数の四元数類似とみなすことができる．

また，四元数重み付きゼータ関数を，伊原ゼータ関数ではなくその二乗の一般化とするのが妥当である根拠の一つとして，有理性を挙げることができる．
G を右上のグラフとし，$D(G)$ を右下の有向グラフとする．
各 arc 上の四元数重みを
$w(e_1)=1+i,w(e_1^{-1})=1-i,$
$w(e_2)=1+j,w(e_2^{-1})=1-j,$
$w(e_3)=1+k,w(e_3^{-1})=1-k,$
$w(e_4)=i,w(e_4^{-1})=-2i,$
$w(e_5)=1,w(e_5^{-1})=2$ で与える．このとき，

$$\tilde{\mathbf{W}}=\frac{1}{1-2x^2}\begin{pmatrix}0&1+i&0&-2i\\1-i&0&1+j&1\\0&1-j&0&1+k\\i&2&1-k&0\end{pmatrix},$$





$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{1-2x^2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ となり，Theorem 5 を用いることで次式を得る：

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)^{-1} &= \mathrm{Sdet}_x(\mathbf{I}_4 - x\tilde{\mathbf{W}} + x^2\tilde{\mathbf{D}})(1-2x^2)^{10} \\ &= (1-2x^2)^2(1+4x^2+4x^3+24x^4+16x^5+98x^6+60x^7+368x^8 \\ &\quad +184x^9+776x^{10}+448x^{11}+1856x^{12}+512x^{13}+3072x^{14}+4096x^{16}). \end{aligned}$$

上式をある多項式の 2 乗として表すことはできないので，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ の「二乗根」を四元数重み付きゼータ関数として採用すると，伊原ゼータ関数の特徴である有理性が成り立たない．したがって，四元数重み付きゼータ関数の定義に，伊原ゼータ関数そのものではなく，その 2 乗の一般化を採用することは有理性の観点から妥当であるといえる．

最後に，Dieudonné 行列式との関係について述べる．$\mathbb{H}[[x]]$ は斜体ではないため，正規化された Dieudonné 行列式 Ddet は $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{H}[[x]])$ に対して定義されない．したがって，$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,x)$ が Ddet で表されるには少なくとも，x を実数 t に特殊化し，さらに t を (3) が収束するような絶対値の小さな値とする必要があろう．そのような条件の下では

$$\mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,t) = \prod_C |1-w(C)t^{|C|}|^{-2},$$

であり，さらに Dieudonné 行列式を用いた表示：

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathbb{H}}(G,w,t)^{-1} &= \mathrm{Ddet}(\mathbf{I}_{2m} - (\mathbf{B}_w - \mathbf{J}_w)t)^2 \\ &= \mathrm{Ddet}(\mathbf{I}_n - t\tilde{\mathbf{W}} + t^2\tilde{\mathbf{D}})^2 \prod_{r=1}^{m} |1-w(e_r)w(e_r^{-1})t^2|^2. \end{aligned}$$

が得られる．

References

[1] Aslaksen, H. : Quaternionic Determinants. Math. intelligencer **18**, no3, pp. 57–65 (1996)

[2] Ihara, Y. : On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan **18**, pp. 219–235 (1966)

[3] Konno, N., Mitsuhashi, H., Sato, I. : The quaternionic weighted zeta function of a graph, J. Algebr. Comb., published online (2016)

[4] Mizuno, H., Sato, I. : Weighted zeta functions of graphs. J. Combin. Theory Ser. B **91**, pp.169–183 (2004)

[5] Serre, J. -P. : Trees, Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] Stark, H. M., Terras, A. A. : Zeta functions of finite graphs and coverings. Adv. Math. **121**, pp. 124-165 (1996)

[7] Watanabe, Y., Fukumizu, K. : Graph Zeta Function in the Bethe Free Energy and Loopy Belief Propagation. Adv. Neural Inf. Process. Syst. **22** 2017–2025 (2009)