有限コクセター群の部分バーンサイド環の単元

近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
室蘭工業大学大学院・工学研究科　竹ヶ原裕元 (Yugen Takegahara)
Muroran Institute of Technology
北星学園大学・経済学部　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)†
Graduate School of Economics, Hokusei Gakuen University

1 Notation

G は，有限群とする．(g) は，$g \in G$ を含む G の共役類とする．$c\ell(G)$ は，G の共役類全体の集合とする．$W_G(H)$ (または WH) は，剰余群 $N_G(H)/H$，ただし，H は G の部分群，$N_G(H)$ は H の G における正規化群，とする．二つの部分群 $H, K \leq G$ に対し，$H\backslash G/K$ は G の H と K による両側剰余類，$[H\backslash G/K]$ は，その完全代表系とする．(H) は，G の部分群 H を含む共役類; すなわち，$(H) = \{{}^gH \mid g \in G\}$，ただし，$g \in G$ に対し，${}^gH := gHg^{-1}$，とする．G-集合 X に対し，$[X]$ は，X を含む G-集合の同型類，X が有限集合のとき，$|X|$ は，X の要素の個数とする．$\mathcal{D}$ は，G の部分群の collection を表す; すなわち，$\mathcal{D}$ は，G-共役をとる操作で閉じている G の部分群の集合である．$C(\mathcal{D})$ は，$\mathcal{D}$ の G-共役類全体の集合とする; すなわち，$C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$．$\mathcal{D}$ が G の部分群全体のとき $C(\mathcal{D})$ を $C(G)$ と書く．包含関係に関するポセット $\mathcal{D}$ のメビウス関数を $\mu_{\mathcal{D}}$ と書く．本稿では，環は単位元を持つものとする．$\mathcal{O}^\times$ は，環 $\mathcal{O}$ の単元群とする．

2 Introduction

有限群の collection の一般バーンサイド環 ([Yo90]) の単元群の研究は，[IO15] で始められた．対称群とその Young 部分群の collection から得られる一般バーンサイド環は，1 でない単元 α を持つ ([IO15])．単元 α は対称群の交代指標を与える．論文 [OTY16] で，我々は単元 α が多項係数を用いて記述できることを示した．本稿では，任意の有限 Coxeter 群とその parabolic subgroups の collection に対して α と同様の性質を持つ元を，Solomon の交代指標の公式の類似から構成し，それが単元であること，また，その元が，多項係数を用いて表現できることをを示した論文 [OTY] の概要を述べる．

$W = \langle S \rangle$ を Coxeter system(W, S) を持つ有限 Coxeter 群とする．任意の部分集合 $J \subset S$ に対し，W の部分群 $W_J = \langle s \mid s \in J \rangle$ を W の *standard parabolic subgroup* と呼ぶ．より一般に W の部分群は，ある standard parabolic subgroup と W-共役であるとき，*parabolic subgroup* と呼ばれる．$\mathcal{P}$ を W のすべての parabolic subgroups の集合とする．$\Omega(W, \mathcal{P})$ を元 $[W/H]$，ただし，$H \in \mathcal{P}$，で生成された通常のバーンサイド環 $\Omega(W)$ の部分加群とする．このとき，$\Omega(W, \mathcal{P})$ は基底 $\{[W/H] \mid (H) \in C(\mathcal{P})\}$ を持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群である．G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は，G/H の同型類 $[G/H]((H) \in C(G))$ の $\mathbb{Z}$-線形結合全体からなる可換環である．ただし，基底の元の間の積は

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{HgK \in [H\backslash G/K]} [G/(H \cap {}^gK)]. \tag{2.1}$$

で与えられる．任意の二つの部分集合 $J, K \subset S$ と $W \in \mathcal{P}$ に対し，

$$[W/W_J] \cdot [W/W_K] = \sum_{W_JgW_K \in [W_J\backslash W/W_K]} [W/(W_J \cap {}^gW_K)] \tag{2.2}$$

が成立する ([So76]) から $\Omega(W, \mathcal{P})$ は $\Omega(W)$ の部分環である．この環を *partial Burnside ring* (部分バーンサイド環，または PBR と略記する) *relative to the parabolic subgroups of* W ([BBTH92], [Ta06]) と呼ぶ．

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.
† supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400001.

π_J は剰余類 W/W_J が与える W の置換指標とする．ε をすべての元 $s \in S$ に対し $\varepsilon(s) = -1$ で定義される W の交代指標とする．公式

$$\varepsilon = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J \tag{2.3}$$

は Solomon により得られた ([So66])．

本稿の目的は ε から $\Omega(W, \mathcal{P})$ の 1 でない単元を与えることである．

Theorem 4.3 *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of the PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ relative to $\mathcal{P}$ of W. Then α is a non-identity unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

元 $w \in W$ が存在し $J^w = K$ ([GP00, 2.3.1]) が成立するとき，二つの部分集合 $J, K \subset S$ が W の同じ *Coxeter class* に属するという．これは，W_J と W_K が W で共役であることと同値である ([GP00, 2.1.13])．p_J を J の Coxeter class の元の個数とする．数 p_J は，W_J と W 内で共役な standard parabolic subgroups の個数と等しい．Theorem 4.3 の系として次を得る．

Corollary 4.5 *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then

$$\alpha = \sum_{(W_J) \in C(\mathcal{P})} (-1)^{|J|} p_J [W/W_J].$$

さらに，任意の既約有限 Coxeter 群に対して，多項係数を用いた α の公式 (系 4.6) も得られる．

3 Burnside ring

部分群 $H \leq G$ と左 G-集合 X に対し，

$$\mathrm{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

とする．[to79, Proposition 1.2.2] により，任意の $(K) \in C(G)$ に対し，

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\mathrm{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(G)$$

で与えられる写像 $\varphi = (\varphi_H) : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) := \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z}$ は，単射環準同型である．φ は，*Burnside homomorphism* または，*mark homomorphism* と呼ばれている．

任意の $x \in \Omega(G)$ に対し，$\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)} \in \widetilde{\Omega}(G)$，ただし，$x_H = \varphi_H(x)$ と書く．

4 Units of PBR relative to $\mathcal{P}$ of W

(W, S) をコクセター系，W を有限とする．(W, S) の *Coxeter element* とは，$\prod_{x \in S} x \in W$ の形で表される W の元である．W のコクセター元全体は W の一つの共役類を構成する ([Ca72, Theorem 10.3.1]) から，ただ一つの共役類 $(c_S) \in c\ell(W)$，ただし，$c_S \in W$ はコクセター元，が存在する．

Lemma 4.1. *Let P be a parabolic subgroup of W with $(P) = (W_J) \in C(\mathcal{P})$, where $J \subset S$. Then P includes an element σ_P with $(\sigma_P) = (c_J) \in c\ell(W)$, where c_J is a Coxeter element of the standard parabolic subgroup W_J.*

Proof. 仮定より元 $w \in W$ が存在し $P = {}^w W_J$ を満たすから，$\sigma_P = w c_J w^{-1}$，ただし，c_J は W_J のコクセター元，とおくことにより，$(\sigma_P) = (c_J)$ を得る． □

任意の部分群 $H \leq W$ に対し，parabolic subgroup P_H を H を含むすべての parabolic subgroups の共通部分として定義する．Lemma 4.1 により，W の任意の parabolic subgroup P で $(P) = (W_J)$ を満たすものは，元 σ_P で $P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$，$(\sigma_P) = (c_J)$ を満たすものを含む．

$$\alpha = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \in \Omega(W, \mathcal{P}) \tag{4.1}$$

とおく．元 α は $\Omega(W)$ にも含まれる．集合 $\mathcal{P}$ は共通部分をとる操作で閉じていて ([So76, Section 2])，$W \in \mathcal{P}$ が成り立つから，$\Omega(W, \mathcal{P})$ は $\Omega(W)$ の部分環である ([Yo90, 3.15 (b)])．

Lemma 4.2. *If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(W)}$, then $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$, and $\alpha_P = \varepsilon(\sigma_P)$ for all $(P) \in C(\mathcal{P})$.*

Proof. H を W の部分群とすると，parabolic subgroup P_H の定義より，

$$\mathrm{inv}_{P_H}(W/W_J) = \{\sigma W_J \mid P_H \leq {}^{\sigma}W_J\} = \{\sigma W_J \mid H \leq {}^{\sigma}W_J\} = \mathrm{inv}_H(W/W_J)$$

がすべての部分集合 $J \subset S$ について成立する．従って $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ が任意の $(H) \in C(W)$ に対して成り立つ．$P = P_{\langle \sigma_P \rangle}$ が，$P \in \mathcal{P}$ に対して成立するから，$\mathrm{inv}_P(W/W_J) = \mathrm{inv}_{\langle \sigma_P \rangle}(W/W_J)$ がすべての部分集合 $J \subset S$ について成り立つ．[So66, Theorem 2] により，任意の $P \in \mathcal{P}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_P) &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J(\sigma_P) \\
&= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_{\langle \sigma_P \rangle}([W/W_J]) \\
&= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_P([W/W_J]) \\
&= \varphi_P\left(\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]\right) \\
&= \alpha_P
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる． □

Remark 1. Lemma 4.2 follows from [GP00, 3.1.8] also. However, our proof does not require Deodhar's Lemma [De77].

[Yo90, Corollary 4.3] と Lemma 4.2 を用いることにより，

$$\alpha = \sum_{(P) \in C(\mathcal{P})} \frac{1}{|W_W(P)|} \left(\sum_{H \in \mathcal{P}} \mu_{\mathcal{P}}(P, H) \varepsilon(\sigma_H)\right) [W/P],$$

ただし，$\sigma_H \in W$，$H = H_{\langle \sigma_H \rangle}$，が成り立つことがわかる．さらに，$\alpha$ の定義 (Eq. (4.1)) により，

$$\frac{1}{|W_W(P)|} \left(\sum_{H \in \mathcal{P}} \mu_{\mathcal{P}}(P, H) \varepsilon(\sigma_H)\right) = \begin{cases} p_J & \text{if} \quad \varepsilon(\sigma_P) = 1, \\ -p_J & \text{if} \quad \varepsilon(\sigma_P) = -1, \end{cases}$$

ただし，$p_J = |\{K \subset S \mid (W_K) = (W_J)\}|$，$(P) = (W_J)$，を得る．

Lemma 4.2 は以下の定理を示す．

Theorem 4.3. *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then α is a non-identity unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

Corollary 4.4. *Let $\Omega(W, \mathcal{P})$ be a PBR relative to $\mathcal{P}$ of W. Then there is a subgroup of the unit group $\Omega(W, \mathcal{P})^{\times}$ generated by -1 and α.*

総和の index を S の部分集合全体から，$C(\mathcal{P})$ に取り替えることにより以下の系を得る.

Corollary 4.5. *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W,S) and let α be an element*

$$\sum_{J\subset S}(-1)^{|J|}[W/W_J]$$

of $\Omega(W,\mathcal{P})$. Then

$$\alpha=\sum_{(W_J)\in C(\mathcal{P})}(-1)^{|J|}p_J[W/W_J].$$

任意の既約有限コクセター群に対し，数 p_J の値が Geck と Pfeiffer により計算されている．それらの結果 [GP00, 2.3.8, 2.3.10, 2.3.13] から以下の系を得る.

Corollary 4.6.

1. *Let W be the Coxeter group of type A_{n-1}, then*

$$\alpha=\sum_{\lambda_J\vdash n}(-1)^{|J|}\binom{k_J}{\ell_1^J,\dots,\ell_n^J}[W/W_J],$$

where $\lambda_J=(1^{\ell_1^J},\dots,n^{\ell_n^J})$ is a partition of n, $k_J=\ell_1^J+\cdots+\ell_n^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J.

2. *Let W be the Coxeter group of type B_n, then*

$$\alpha=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\lambda_J\vdash m}(-1)^{|J|}\binom{k_J}{\ell_1^J,\dots,\ell_m^J}[W/W_J],$$

where $\lambda_J=(1^{\ell_1^J},\dots,m^{\ell_m^J})$ is a partition of m, $k_J=\ell_1^J+\cdots+\ell_m^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J.

3. *Let W be the Coxeter group of type $\mathrm{D_n}$, then*

$$\begin{aligned}\alpha=&\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{\lambda_J\vdash m}(-1)^{|J|}\binom{k_J}{\ell_1^J,\dots,\ell_m^J}[W/W_J]\\&+\sum_{\lambda_J\vdash n:\ \textit{all-even}}(-1)^{|J|}\binom{k_J}{\ell_1^J,\dots,\ell_n^J}[W/W_J]\\&+\sum_{\lambda_J\vdash n:\ \textit{has an odd part}}(-1)^{|J|}\left(2-\frac{\ell_1^J}{k_J}\right)\binom{k_J}{\ell_1^J,\dots,\ell_n^J}[W/W_J]\end{aligned}$$

where $\lambda_J=(1^{\ell_1^J},\dots,m^{\ell_m^J})$ is a partition of $m\le n-2$, n, $k_J=\ell_1^J+\cdots+\ell_m^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J.

参考文献

[BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.

[Ca72] Carter, R. W.: *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, **28**, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

[De77] Deodhar, V. V.: *Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function*, Invent. Math. **39** (1977), 187–198.

[GP00] Geck, M,; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[IO15] Idei, H.; Oda, F.:*The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[OTY16] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.:*The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group*, J. Algebra **460** (2016), 370–379.

[OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.:*Sign unit of a partial Burnside ring of finite Coxeter group and Coxeter classes*, preparation.

[So66] Solomon, L.:*The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3**, (1966), 376 – 393.

[So76] Solomon, L.:*A Mackey Formula in the Group Ring of a Coxeter Group*, J. Algebra **41**, (1976), 255 – 264.

[Ta06] Tambara, D.:*A partial Burnside ring of* $\mathrm{GL}(n, q)$ *relative to line stabilizers*, J. Algebra **296** no. 1, (2006), 301-322.

[to79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.