Few triangle sets

篠原雅史 [1], 平坂貢 [2]
[1] 滋賀大学教育学部, [2]Pusan national University
[1]shino@edu.shiga-u.ac.jp, [2]hirasaka@pusan.ac.kr

Abstract

本稿では s-distance set の概念を拡張した t-triangle set を定義し，最大の頂点数を持つ t-triangle set ($t \leq 3$) の分類問題について紹介する．

1 s-distance set

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の有限部分集合 X が s-distance set （s-距離集合）であるとは X の中の相異なる二点間の距離が丁度 s 種類出てくるときをいう．つまり，

$$A_2(X) = \{d(x,y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$$

と定め，$|A_2(X)| = s$ のとき，X を s-distance set という．ここで，$d(x,y)$ は二点 x, y のユークリッド距離を表す．次元 d と距離の種類 s に対して，大きな頂点数を持つ s-距離集合 $X \subset \mathbb{R}^d$ を特徴付けたいというのが距離集合における主な研究目標である．相似な距離集合は距離の関係としては同じものを持つので，距離集合の分類を考えるときにはそのようなものを同一視して行う．

Blokhuis[1] は “Few distance sets” の中で，固定した次元 d に対し，$\mathbb{R}^d$ 上の 2-distance set X に対する頂点数の限界式を与えた．

Theorem 1.1 (Blokhuis). $X \subset \mathbb{R}^2$ とする．X が 2-*distance set* のとき，

$$|X| \leq \binom{d+2}{2}$$

が成り立つ．

そこで，固定した次元に対する 2-distance set の頂点数の最大値を $g_2^*(d)$ で表すことにする．つまり，

$$g_2^*(d) := \max\{|X| \mid X \textit{ is a } 2\textit{-distance set in } \mathbb{R}^d\}$$

とする．Kelly[4], Croft[2], Lisoněk[5] らにより次のように最大値が求められている．

Theorem 1.2. $d \leq 8$ に対する最大値 $g_2^*(d)$ は次で与えられる．

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_2^*(d)$	3	5_a	6	10_b	16_c	27_d	29	45

ここで，上の a∼d はそれぞれ次の強正則グラフに対応する 2-*distance set* である．ただし，n, k, λ, μ は強正則グラフのパラメータを表す．

	graph	n	k	λ	μ
a	*pentagon*	5	2	0	1
b	$T_5 = L(K_5)$	10	6	3	4
c	*Clebsch graph*	16	5	0	2
d	*Schläfli graph*	27	10	1	5

[1]supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 26400003.

Definition 1.3. $A(X) = \{a, 1\}$ $(a < 1)$ となる 2-distance set X に対して，単純グラフ $G(X) = (V, E)$ を次のように定義する．

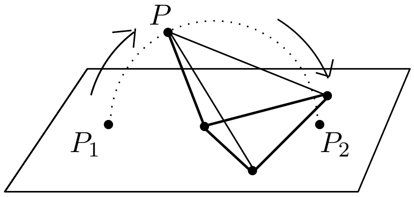
$$\begin{cases} V = X \\ \{p, q\} \in E \Longleftrightarrow d(p, q) = a \end{cases}$$

与えられたグラフに対応する 2-distance set に関して，次の結果が知られている．

Theorem 1.4 (Einhorn-Scehoenberg, 1966 [3]). 完全グラフ，空グラフを除く，位数 n の単純グラフ G に対応する $\mathbb{R}^d$ 上の 2-*distance set* X について次が成り立つ．

(i) $d = n - 1$ となる 2-*distance set* X は無限に存在する．

(ii) $d \leq n - 2$ となる 2-*distance set* X はただ一つ存在する．ただし，つぶれて 1-*distance set* になっているもの（つまり $a = 0$ の場合）も許すとする．



完全グラフ，空グラフを除く位数 n の単純グラフ G に対し，$G(X) = G$ となる $X \subset \mathbb{R}^d$ の最小の次元を $m(G)$ で表す． Theorem 1.4 より $m(G) \leq n - 2$ となる．

2 t-triangle set と isometric sequence

距離の種類を合同な線分の種類だと思うと，距離集合の問題を次のように拡張できる．

Definition 2.1. X の k 点部分集合全体を $\binom{X}{k}$ で表す． X の 3 点部分集合の合同類 $\binom{X}{3}/_{\equiv}$ を $A_3(X)$ で表す．$|A_3(X)| = t$ のとき，X を t-triangle set とよぶ．

Remark 2.2.
- 三辺の長さが a, b, c である三角形を abc と表す事にする．
- 本稿を通して $n := |X|$, $s := |A_2(X)|$, $t := |A_3(X)|$ とする．
- 同様に $A_i(X)$ が定義できる．$(|A_i(X)|)_{1 \leq i \leq n}$ を isometric sequence という．このとき，$|A_1(X)| = |A_n(X)| = 1$ が成り立つ．

Example 2.3. X を辺の長さ 1 の正六角形の頂点集合とすると，$A_2(X) = \{1, \sqrt{3}, 2\}$ より $s = 3$. また，$\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 2$ すると，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, \beta\beta\beta\}$$

となるので $t = 3$. また，$|A_4(X)| = 3$, $|A_5(X)| = 1$ となるので X の isometric sequence は $(1, 3, 3, 3, 1, 1)$.

距離集合の場合と同様に，空間と t の値を固定したときに大きな頂点数を持つ配置 X を特徴付けることを目標とする．特に，次の値について考えていく．

$$g_t(d) := \max\{|X| \mid X \textit{ is a t-triangle set in } \mathbb{R}^d\}.$$

3　t-triangle set に関する結果

s, t に対する，自明な関係式として次が得られる．

$$\frac{s}{3} \leq t \leq \binom{s+2}{3}.$$

次は我々の主結果の一つである．

Theorem 3.1. $n \geq 5$ かつ $t \leq 3$ のとき，　$s \leq t$ が成り立つ．

$n = 4$ のとき,（正方形ではない）長方形を考えると $s = 3, t = 1$ となっているため $n \geq 5$ の仮定は必要である．

Corollary 3.2. 1-*triangle set* の最大値 $g_1(d)$ について，次が成り立つ．

$$g_1(d) = \begin{cases} 4 & if\, d = 2, \\ d+1 & if\, d \geq 3. \end{cases}$$

最大値を与えるのは，長方形 $(d = 2)$, *regular simplex* $(d \geq 3)$ のとき，またそのときに限られる．

3.1　2-triangle set

$n \geq 5$ のとき，　Theorem 3.1 より 2-triangle set は特別な 2-distance set となっていることが分かる．

Lemma 3.3. $n \geq 5$ かつ $t = 2$ のとき，　$G(X)$ または $G(X)$ の補グラフ $\overline{G(X)}$ は次のいずれかと同型である．

1. 完全二部グラフ $K_{n-p,p}$,
2. *Cocktail party graph* $K_{2,2,\ldots,2}$,
3. *pentagon* C_5.

Theorem 3.4. 2-*triangle set* の最大値 $g_2(d)$ について，次が成り立つ．

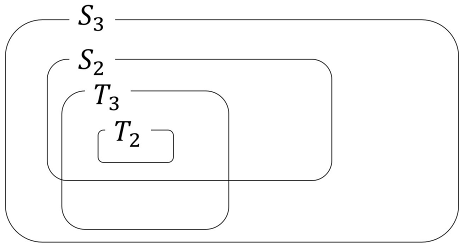
$$g_2(d) = \begin{cases} 5 & if\, d = 2, \\ 2d & if\, d \geq 3. \end{cases}$$

更に，最大値を与えるのものは，正五角形 $(d = 2)$ または *cross polytope* $(d \geq 3)$ のとき，またそのときに限られる．

Proof. Lemma 3.3 のグラフ G に対する $m(G)$ は次のように与えられる (cf. [9], [6], [8])．

$$m(K_{n-p,p}) = n - 2, \quad m(K_{2,2,\ldots,2}) = \frac{n}{2}, \quad m(C_5) = 2.$$

特に，$m(K_{2,2,\ldots,2})$, $m(C_5)$ を与える 2-distance set はそれぞれ cross polytope, 正五角形である．以上より定理が従う．　□



S_i: $s \leq i$ となる X 全体，T_i: $t \leq i$ となる X 全体
（ただし $n \geq 5$ とする．）

3.2 3-triangle set

X を 3-triangle set とすると，Theorem 3.1 より $s = 2, 3$ となる．一方 $s = 2$ のとき，自明な関係式より $t \leq 4$ となる．特に，triangle-free であるグラフに対応する 2-distance set は $t \leq 3$ を満たす．このクラスの 2-distance set について，小さい次元の場合にはある程度の情報を得る事ができるが，制限が弱いため一般の次元に対して分類することは難しいものと思われる．特に，triangle-free の strongly regular graph は $t = 3$ でよい 2-distance set の例を与えるが，その分類は今のところ完成していない．

ここでは，まず $s = t = 3$ の場合について議論する．2-distance set を単純グラフに対応させたように，$s = 3$ のときは 3 色で辺に色付けされた完全グラフをさせることができる．つまり，$\alpha \in A_2(X)$ に対し，

$$E_\alpha := \{\{x, y\} \mid d(x, y) = \alpha\}$$

とし $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A_2(X)}$ を考えればよい．

次の例は 3-triangle set に対応する辺着色を与える．ここで，$X = Y \cup Z$ ($Y \cap Z \neq \emptyset$) とする．

Example 3.5. $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ とし，

$$E_\alpha = \{\{y, z\} \mid y \in Y, z \in Z\},$$

$$E_\beta = \{\{y_1, y_2\}, \{y_3, y_4\}, \{z_1, z_2\}, \{z_3, z_4\}\},$$

$$E_\gamma = \binom{X}{2} \setminus (E_\alpha \cup E_\beta)$$

と定める．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\gamma, \beta\gamma\gamma\}.$$

また，$|W| \geq 5$ を満たす部分集合 $W \subset X$ についても同様．

Example 3.6.

$$E_\alpha = \binom{Y}{2} \cup \binom{Z}{2},$$

$$E_\beta : Y \text{ と } Z \text{ の間の } \mathit{matching}\ ,$$

$$E_\gamma = \binom{X}{2} \setminus (E_\alpha \cup E_\beta)$$

と定める．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\beta\gamma, \alpha\gamma\gamma\}.$$

Example 3.7.

$$E : Y \text{ と } Z \text{ の間の } matching$$

に対し，E を 2 つの集合に分割し E_β, E_γ とする．また，

$$E_\alpha = \binom{X}{2} \setminus (E_\beta \cup E_\gamma)$$

と定める．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\gamma\}.$$

Example 3.8. $|Z| = 2$ とする．

$$E_\alpha = \binom{Y}{2},$$

$$E_\gamma = \binom{Z}{2},$$

$$E_\beta = \binom{X}{2} \setminus (E_\alpha \cup E_\gamma)$$

と定める．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\alpha, \beta\beta\alpha, \beta\beta\gamma\}.$$

Lemma 3.9. *X $s = t = 3$, $n \geq 5$ を満たすとする．このとき，X に対応する辺着色グラフは Example 3.5 $\sim$ Example 3.8 のいずれかである．*

Theorem 3.10. $X \subset \mathbb{R}^d$ $(n \geq 5)$ に対し，$s = t = 3$ とする．このとき，

$$n \leq 2d + 2$$

が成り立つ．更に，等号成立は $X = R_d \cup (-R_d)$ のとき，またそのときに限られる．ここで，R_d は原点を重心に持つ $\mathbb{R}^d$ 上の *regular simplex* とする．

Proof. 各例に対して，$n \leq 2d + 2$ となる $X \subset \mathbb{R}^d$ が存在するか考える．

(1) Example 3.5 のとき，Y と Z の直交性より

$$Y = \{(\pm 1, \pm 1, 0, 0)\}, \quad Z = \{(0, 0, \pm 1, \pm 1)\}$$

とできることが分かる．特に，X を三次元空間に実現することはできない．$W \subset X$ に対しても同様に確かめられる．

(2) Example 3.6 のとき，X は $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 点以上の同色クリークを含む．このとき，

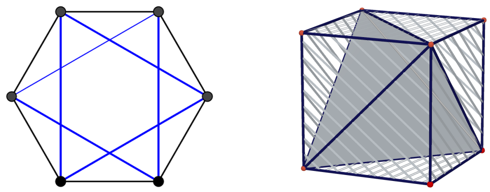
$$d \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$

より，$n \leq 2d+2$ が従う．等号成立の場合を確かめるためには，$|Y| = |Z|$ かつ E_β が perfect matching となるときを考えればよい．このとき $X = R_d \cup (-R_d)$ となることが確かめられる．

(3) Example 3.7 のとき，(2) と同様に $n \leq 2d + 2$ が成り立つ．等号成立の場合を確かめるためには，n が偶数で $|E_\beta| + |E_\gamma| = \frac{n}{2}$ となるときを考えれば十分である．このとき，幾何的な議論により $d > \frac{n}{2}$ となることが確かめられる．よって，この場合 $n < 2d + 2$ となる．

(4) Example 3.8 のとき，X は $n-2$ 点の同色クリークを含むので，$n \leq d+3$.

$\square$



$d=2,3$ のときの例

Corollary 3.11. 3-*triangle set* の最大値 $g_3(d)$ $(d \leq 5)$ について次が成り立つ.

$$g_3(2)=6, \quad g_3(3)=8, \quad g_3(4)=10, \quad g_3(5)=16.$$

Proof. 3-triangle set で $s=3$ に限ると最大値 $2d+2$ を達成できる．これよりも大きい 2-distance set で $t=3$ となるものが存在するか確かめればよい．$d \leq 5$ に対しては 2-distance set の分類を用いてこのことを確認できて主張が従う． $\square$

References

[1] A. Blokhuis, *Few-distance sets*, Ph. D. thesis, Eindhoven Univ. of Technology (1983), (CWI Tract (7) 1984).

[2] H. T. Croft, 9-point and 7-point configuration in 3-space, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **12** (1962), 400–424.

[3] S.J. Einhorn and I.J. Schoenberg, On euclidean sets having only two distances between points. I. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69=*Indag. Math.* 28 (1966), 479–488, 489–504.

[4] L. M. Kelly, Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227–229.

[5] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* 77 (1997), 318–338.

[6] H. Maehara, Euclidean embeddings of finite metric spaces, *Discrete Mathematics* 313 (2013) 2848–2856.

[7] A. Neumaier, Distance matrices, dimension, and conference graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 43 (1981), no. 4, 385–391.

[8] H. Nozaki and M. Shinohara, A geometrical characterization of strongly regular graphs, *Linear Algebra and its Applications* 437 (2012) 2587–2600.

[9] A. Roy, Minimal Euclidean representation of graphs, *Discrete math.* 310 (2010), 727–733.